www.freemaths.fr

Spé Maths
Terminale

Limites « d'une fonction f »

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LIMITES FINIES EN $+\infty$ ET $-\infty$

1

CORRECTION

1. a. Étudions la limite en $+\infty$ de la fonction f :

Ici: $f(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 16}{x^2 - 9x + 8}$, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1 ; 8\}$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 10x + 16}{x^2 - 9x + 8}.$$

Or: • $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^2 - 10x + 16 = \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \frac{10}{x} + \frac{16}{x^2}\right)$ $(x \neq 0)$

• $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^2 - 9x + 8 = \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \frac{9}{x} + \frac{8}{x^2}\right)$ $(x \neq 0)$.

Et: • $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{-10}{x} = 0^-$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{16}{x^2} = 0^+$

• $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{-9}{x} = 0^-$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{8}{x^2} = 0^+$.

Dans ces conditions: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 (1 + 0^- + 0^+)}{x^2 (1 + 0^- + 0^+)}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2}$$

$$= 1.$$

1. b. Étudions la limite en $-\infty$ de la fonction f :

Ici: $f(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 16}{x^2 - 9x + 8}$, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1 ; 8\}$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 10x + 16}{x^2 - 9x + 8}.$$

Or:

- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^2 - 10x + 16 = \lim_{x \to -\infty} x^2 \left(1 - \frac{10}{x} + \frac{16}{x^2}\right)$ $(x \neq 0)$

- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^2 - 9x + 8 = \lim_{x \to -\infty} x^2 \left(1 - \frac{9}{x} + \frac{8}{x^2}\right)$ $(x \neq 0)$.

Et:

- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{-10}{x} = 0^+$ et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{16}{x^2} = 0^+$

- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{-9}{x} = 0^+$ et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{8}{x^2} = 0^+$.

Dans ces conditions: $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2(1 + 0^+ + 0^+)}{x^2(1 + 0^+ + 0^+)}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2}$$

$$= 1.$$

2. Concluons:

- Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$: la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$. Il s'agit de la droite d'équation $y = 1$.

- Comme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$: la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale en $-\infty$. Il s'agit de la droite d'équation $y = 1$.