

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Fonctions, Synthèse



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

FONCTION

Partie A

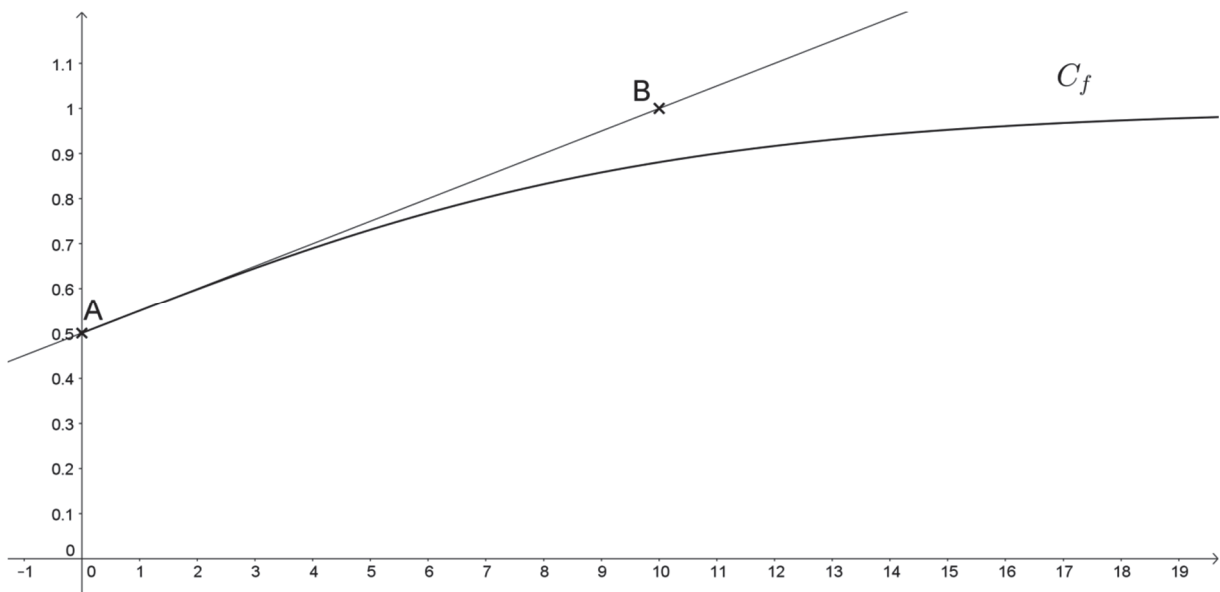
Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1 + e^{-bx}}$$

La courbe C_f représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

La courbe C_f passe par le point $A(0 ; 0,5)$.

La tangente à la courbe C_f au point A passe par le point $B(10 ; 1)$.



1. Justifier que $a = 1$.

On obtient alors, pour tout réel $x \geq 0$,

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-bx}}$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Vérifier que, pour tout réel $x \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{be^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}$$

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b .

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1^{er} janvier 2000.

Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.

Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1^{er} janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1^{er} janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
2.
 - a. Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0 ; +\infty[$.
 - b. Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.
 - c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé.
Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.
4. On définit la proportion moyenne d'individus équipés entre 2008 et 2010 par

$$m = \frac{1}{2} \int_8^{10} p(x) dx$$

- a. Vérifier que, pour tout réel $x \geq 0$,

$$p(x) = \frac{e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}}$$

- b. En déduire une primitive de la fonction p sur $[0 ; +\infty[$.
- c. Déterminer la valeur exacte de m et son arrondi au centième.