

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Fonctions, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. Justifions le fait que $a = 1$:

Ici: • $f(x) = \frac{a}{1 + e^{-bx}}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

• $Df = [0; +\infty[$,

• la courbe C_f passe par le point A (0; 0,5),

• la tangente à la courbe C_f au point A passe par B (10; 1).

Comme C_f passe par le point A, nous pouvons écrire: $f(0) = 0,5$.

$$f(0) = 0,5 \iff \frac{a}{1 + e^{-bx \cdot 0}} = 0,5 \iff \frac{a}{2} = 0,5 \text{ cad: } a = 1.$$

Au total, nous avons bien: $a = 1$.

Et nous pouvons écrire pour tout $x \in [0; +\infty[$: $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-bx}}$. (u)

2. Calculons f' sur l'intervalle $[0; +\infty[$:

D'après l'énoncé, f est dérivable sur $[0; +\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0; +\infty[$.

Pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{0 \times (1 + e^{-bx}) - 1 \times (-b e^{-bx})}{(1 + e^{-bx})^2} \quad \left(\frac{u'xv - uxv'}{v^2} \right)$$

$$= \frac{b e^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}$$

Au total, pour tout $x \in [0; +\infty[$, nous avons bien: $f'(x) = \frac{b e^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}$.

3. Déterminons b:

D'après l'énoncé, nous savons que la tangente à la courbe Cf, au point A, passe par le point B.

Soit $y = cx + b$, l'équation de cette tangente.

" $c = f'(x_A)$ " est le coefficient directeur et est tel que:

$$c = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Leftrightarrow \frac{1 - (0,5)}{10 - 0} \quad \text{cad: } c = 0,05.$$

Or: $f'(x_A) = f'(0)$

$$= \frac{b}{4}$$

En égalisant, nous obtenons: $c = f'(x_A) \Leftrightarrow 0,05 = \frac{b}{4}$ cad: $b = 0,2$.

Au total: $b = 0,2$.

Et nous pouvons écrire pour tout $x \in [0; +\infty[$: $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$.

Partie B:

1. Déterminons la proportion d'individus équipés au 1^{er} janvier 2010:

Il s'agit ici de calculer: $p(10)$.

Or: • $p(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$

• $D_p = [0; +\infty[$.

Dans ces conditions: $p(10) = \frac{1}{1 + e^{-2}}$ **cad:** $p(10) \approx 0,88$.

Au total, la proportion d'individus équipés au 1^{er} janvier 2010 sera donc de: 88%.

2. a. Déterminons le sens de variation de la fonction p sur $[0; +\infty[$:

Grâce à la **PARTIE A**, nous savons que la fonction p est dérivable sur $[0; +\infty[$.

$(p(x) = f(x) \text{ avec: } a = 1 \text{ et } b = 0,2)$

Nous savons aussi que sa dérivée sur $[0; +\infty[$ est: $p'(x) = \frac{0,2 e^{-0,2x}}{(1 + e^{-0,2x})^2}$

$$\left(f'(x) = \frac{b e^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2} \right).$$

De plus, pour tout $x \in [0; +\infty[$: • $0,2 e^{-0,2x} > 0$

• $(1 + e^{-0,2x})^2 > 0$.

Ainsi, sur $[0; +\infty[$: $p'(x) > 0$.

Et donc: p est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. b. Calculons la limite de la fonction p en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$$

$$= 1, \text{ car: } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,2x} = 0.$$

Ainsi, la limite de la fonction p en $+\infty$ est égale à: 1.

2. c. Interprétons ce résultat:

Cela signifie qu'au bout d'un très grand nombre d'années, 100% des individus seront équipés.

3. Déterminons l'année demandée:

Le marché est saturé quand la proportion d'individus équipés dépasse 95%.

Ainsi, le marché est saturé quand: $p(x) \geq 0,95$.

$$p(x) \geq 0,95 \Leftrightarrow \frac{1}{1 + e^{-0,2x}} \geq 0,95$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq 0,95 + 0,95 e^{-0,2x}$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,2x} \leq \frac{1}{19}$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{-0,2x}) \leq \ln\left(\frac{1}{19}\right)$$

$$\Leftrightarrow -0,2x \leq -\ln(19)$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{\ln(19)}{0,2} \text{ cad: } x \geq 14,72.$$

Ainsi, le marché sera saturé au cours de l'année: 15.

Soit: en 2015.

4. a. Vérifions, pour tout réel $x \geq 0$, l'égalité demandée:

Pour tout $x \in [0; +\infty[$, nous savons que: $p(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$ (1).

En multipliant, numérateur et dénominateur de (1) par " $e^{0,2x}$ ", nous obtenons:

$$p(x) = \left(\frac{1}{1 + e^{-0,2x}} \right) \times \left(\frac{e^{0,2x}}{e^{0,2x}} \right)$$

$$= \frac{e^{0,2x}}{e^{0,2x} + e^0} \quad \text{cad: } p(x) = \frac{e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}}.$$

Ainsi, pour tout $x \geq 0$, nous avons bien: $p(x) = \frac{e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}}$.

4. b. Déduisons-en une primitive de la fonction p sur $[0; +\infty[$:

$$p(x) = \frac{e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}}, \text{ pour tout } x \in [0; +\infty[.$$

Ça sent le: $\frac{u'}{u}$!

Or si $u = 1 + e^{0,2x}$, $u' = 0,2 e^{0,2x}$.

D'où un "0,2" en trop. Problème qui peut être éliminé en multipliant par "5".

Ainsi, une primitive de la fonction p sur $[0; +\infty[$ est: $P(x) = 5 \ln(u)$

$$\text{cad: } P(x) = 5 \ln(1 + e^{0,2x}).$$

Au total, une primitive de p sur $[0; +\infty[$ est: $P(x) = 5 \ln(1 + e^{0,2x})$.

4. c. Déterminons la valeur exacte de " m " et son arrondi au centième:

La proportion moyenne d'individus équipés entre 2008 et 2010 est:

$$m = \frac{1}{2} \int_8^{10} p(x) dx.$$

$$\text{D'où: } m = \frac{1}{2} [5 \ln(1 + e^{0,2x})]_8^{10}$$

$$\text{cad: } m = \frac{5}{2} (\ln(1 + e^2) - \ln(1 + e^{1,6}))$$

$$\text{ou: } m \approx 0,86.$$

$$\text{Au total: } \bullet \text{ la valeur exacte de "m" est: } \frac{5}{2} (\ln(1 + e^2) - \ln(1 + e^{1,6})),$$

$$\bullet \text{ la valeur approchée de "m" est: } 0,86.$$