

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Spé Maths

## Terminale

Fonctions, Synthèse



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

## CORRECTION

### Partie A:

1. Étudions le sens de variation de  $f$  sur  $[0;1]$ :

• Calculons  $f'$ :

Ici: •  $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1-x}}$

•  $Df = [0;1]$ .

Posons:  $f = \frac{f_1}{f_1 + f_2}$ , avec:  $f_1(x) = 1$  et  $f_2(x) = e^{1-x}$ .

$f_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction polynôme, donc dérivable sur  $[0;1]$ .

$f_2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur  $[0;1]$ .

Par conséquent,  $h = f_1 + f_2$  est dérivable sur  $[0;1]$  comme somme de 2 fonctions dérivables sur  $[0;1]$ .

Dans ces conditions,  $f$  est dérivable sur  $[0;1]$  comme quotient  $\left(\frac{f_1}{h}\right)$  de 2 fonctions dérivables sur  $[0;1]$ , avec: pour tout  $x \in [0;1]$ ,  $h(x) \neq 0$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in [0;1]$ .

Pour tout  $x \in [0;1]$ :  $f'(x) = \frac{0 \times (1 + e^{1-x}) - 1 \times (-e^{1-x})}{(1 + e^{1-x})^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^{1-x}}{(1 + e^{1-x})^2}$ .

**Au total:** pour tout  $x \in [0;1]$ ,  $f(x) = \frac{e^{1-x}}{(1+e^{1-x})^2}$ .

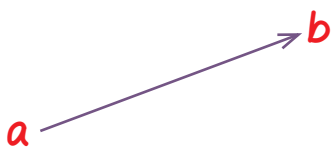
• Étudions le signe de  $f'$  sur  $[0;1]$ :

Pour tout  $x \in [0;1]$ :  $f'(x) > 0$ .

**Ainsi:** pour tout  $x \in [0;1]$ ,  $f$  est strictement croissante.

• Dressons le tableau de variation de  $f$  sur  $[0;1]$ :

Nous avons le tableau de variation suivant:

$x$	0	1
$f'$	+	
$f$		

Avec: •  $a = f(0) \Rightarrow a = \frac{1}{1+e}$ ,

•  $b = f(1) \Rightarrow b = 1$ .

2. Montrons que pour tout  $x \in [0;1]$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e}$ :

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{1-x}} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{e^x} \times \left( \frac{1}{1+e^{1-x}} \right)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{e^x + e^x \times e^{1-x}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{e^x + e}$$

**Au total,** pour tout  $x \in [0;1]$ , nous avons bien:  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e}$ .

3. Montrons que  $\int_0^1 f(x) dx = \ln(2) + 1 - \ln(1+e)$ :

Ici, il s'agit de calculer:  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .

$f$  est continue sur  $[0;1]$ , elle admet donc des primitives sur  $[0;1]$  et par conséquent:  $I$  existe.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{1+e^{1-x}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+e} dx \\ &= \int_0^1 \frac{U'(x)}{U(x)} dx, \text{ avec: } U(x) = e^x + e \\ &= [\ln |U(x)|]_0^1 \\ &= [\ln |e^x + e|]_0^1 \\ &= [\ln(e^x + e)]_0^1, \text{ car sur } [0;1]: e^x + e > 0 \\ &= \ln(2e) - \ln(1+e) \\ \Rightarrow I &= \ln(2) + \ln(e) - \ln(1+e). \end{aligned}$$

Au total, nous avons bien:  $I = \ln(2) + 1 - \ln(1+e)$ .

## Partie B:

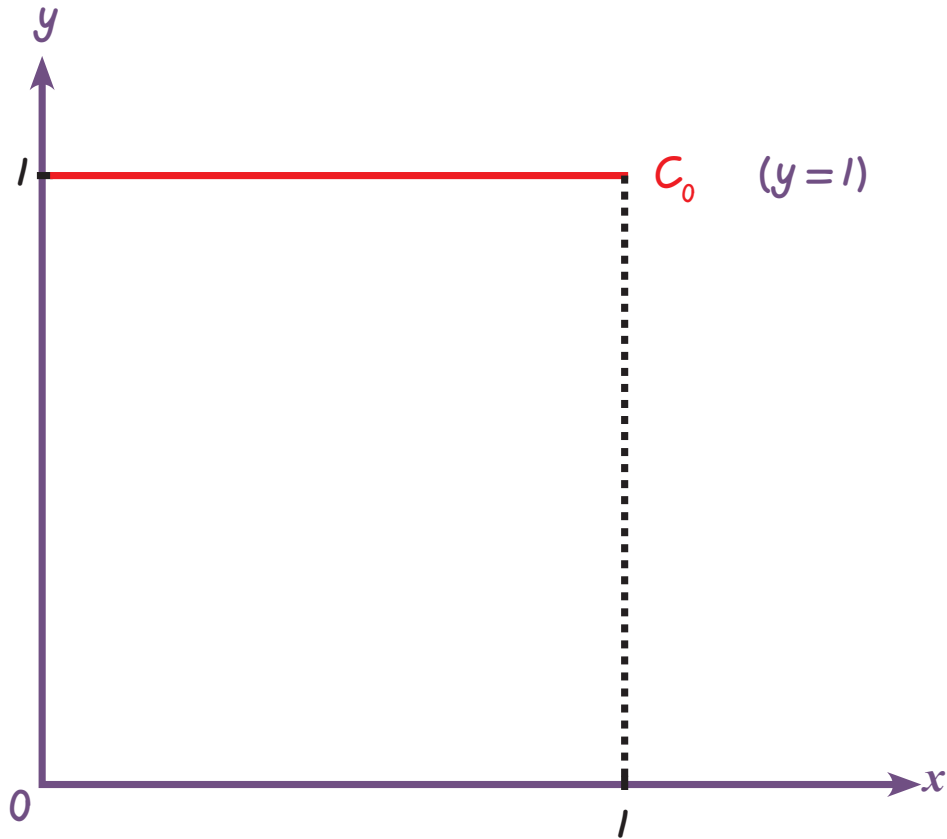
1. Courbe représentative  $C_0$  de la fonction  $f_0$ :

Soit  $n = 0$ ; la fonction  $f_0$  définie sur  $[0,1]$  est:

$$f_0(x) = \frac{1}{1+0 \times e^{1-x}} \Rightarrow f_0(x) = 1.$$

La courbe représentative  $C_0$  a donc pour équation:  $y = 1$  ( $x \in [0,1]$ ).

D'où le graphique suivant:



## 2. Interprétons graphiquement $U_n$ et calculons $U_0$ :

- D'après l'énoncé, nous avons:

$$U_n = \int_0^1 f_n(x) dx, \text{ avec: } f_n(x) = \frac{1}{1 + ne^{1-x}}.$$

Pour tout  $x \in [0, 1]$  et pour tout entier naturel  $n$ :  $ne^{1-x} > 0$ .

Dans ces conditions:  $\frac{1}{1 + ne^{1-x}} > 0 \iff f_n(x) > 0$ .

**Ainsi:**  $U_n$  représente l'aire sous la courbe  $C_n$  délimitée par l'axe des abscisses et les droites d'équation:  $x = 0$  et  $x = 1$ .

- $U_0 = \int_0^1 f_0(x) dx \iff U_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+0} dx$

$$\Leftrightarrow U_0 = \int_0^1 dx$$

$$\Leftrightarrow U_0 = [x]_0^1$$

$$\Rightarrow U_0 = 1.$$

Au total:  $\int_0^1 f_0(x) dx = 1.$

3. Déterminons la conjecture quant au sens de variation de la suite  $(U_n)$  et démontrons là:

- La conjecture que nous pouvons émettre quant au sens de variation de la suite  $(U_n)$  est:

" on pourrait, a priori, penser que la suite  $(U_n)$  est strictement décroissante "

De plus,  $(U_n)$  est positive et semble converger vers " 0 " (minorant).

- $(U_n)$  strictement décroissante ?

Il s'agit de déterminer le signe de  $U_{n+1} - U_n$ .

Posons:  $f_{n+1}(x) = \frac{1}{1 + (n+1)e^{-x}}$  et  $f_n(x) = \frac{1}{1 + ne^{-x}}$ .

Notons: • les fonctions  $f_{n+1}$  et  $f_n$  sont continues sur  $[0,1]$ ;

- elles admettent donc des primitives sur  $[0,1]$ , et par conséquent:

(a)  $\int_0^1 f_{n+1}(x) dx$  et  $\int_0^1 f_n(x) dx$  existent;

- de plus, les fonctions  $f_{n+1}$  et  $f_n$  sont positives sur  $[0,1]$ ;
- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Pour tout entier naturel  $n$  et pour tout  $x \in [0,1]$ , nous avons:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{(1 + ne^{l-x}) - (1 + (n+1)e^{l-x})}{(1 + (n+1)e^{l-x})(1 + ne^{l-x})} = D$$

$$= \frac{-e^{l-x}}{D} < 0.$$

Donc  $f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$  car  $D > 0$  et  $-e^{l-x} < 0$ .

Par ailleurs, comme les conditions (a) sont toutes réunies, nous pouvons écrire:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0 \iff f_{n+1}(x) < f_n(x)$$

$$\iff \int_0^l f_{n+1}(x) dx < \int_0^l f_n(x) dx$$

$$\implies U_{n+1} < U_n.$$

Comme  $U_{n+1} < U_n$ ,  $(U_n)$  est bien une suite strictement décroissante.

#### 4. Déterminons la limite de la suite $(U_n)$ :

Nous savons que toute suite décroissante et minorée est convergente.

Or ici: •  $(U_n)$  est minorée par  $m = 0$ , ( $\int_0^l f_n(x) dx > 0$ )

•  $(U_n)$  est décroissante, pour tout entier naturel  $n$ .

Donc nous pouvons affirmer que  $(U_n)$  est convergente.

Et par conséquent, la suite  $(U_n)$  admet une limite finie.