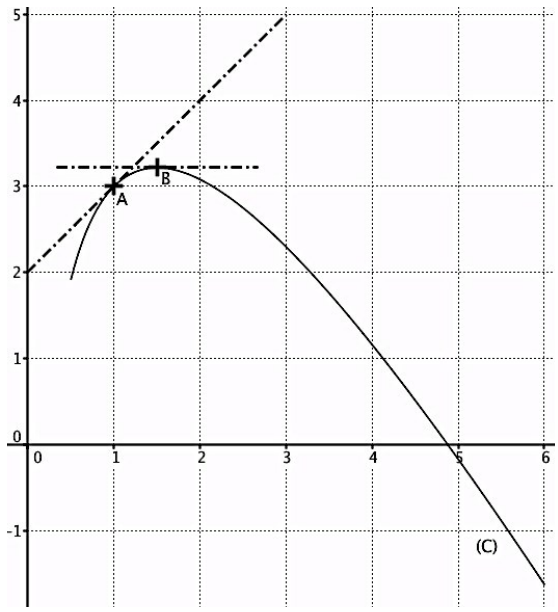
Spé Maths
Terminale

Fonctions, Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

FONCTION

La courbe (C) ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur [0,5 ; 6]. Les points A(1 ; 3) et B d'abscisse 1,5 sont sur la courbe (C).
Les tangentes à la courbe (C) aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale.
On note f' la fonction dérivée de f.



PARTIE A : ÉTUDE GRAPHIQUE

1. Déterminer $f'(1,5)$.
2. La tangente à la courbe (C) au point A passe par le point de coordonnées (0 ; 2). Déterminer une équation de cette tangente.
3. Donner un encadrement de l'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.
4. Déterminer la convexité de la fonction f sur [0,5 ; 6]. Argumenter la réponse.

PARTIE B : ÉTUDE ANALYTIQUE

On admet que la fonction f est définie sur [0,5 ; 6] par $f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x)$.

1. Pour tout réel x de $[0,5\ ;\ 6]$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{-2x+3}{x}$.
2. Étudier le signe de f' sur [0,5 ; 6] puis dresser le tableau de variation de f sur [0,5 ; 6].
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution α sur [0,5 ; 6].

   Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. En déduire le tableau de signe de f sur [0,5 ; 6].
5. On considère la fonction F définie sur [0,5 ; 6] par $F(x) = -x^2 + 2x + 3x\ln(x)$.
   - **a.** Montrer que F est une primitive de f sur [0,5 ; 6].
   - **b.** En déduire l'aire exacte, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$. En donner ensuite une valeur arrondie au dixième.