

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Spé Maths

## Terminale

Fonctions, Synthèse



**ÉNONCÉ** DE L'EXERCICE

# FONCTION

## Partie A

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = xe^{1-x^2}$ .

1. Calculer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

*Indication : on pourra utiliser que pour tout réel  $x$  différent de 0,  $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$ .*

On admettra que la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$  est égale à 0.

2.

- a. On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  et on note  $f'$  sa dérivée.  
Démontrer que pour tout réel  $x$ ,

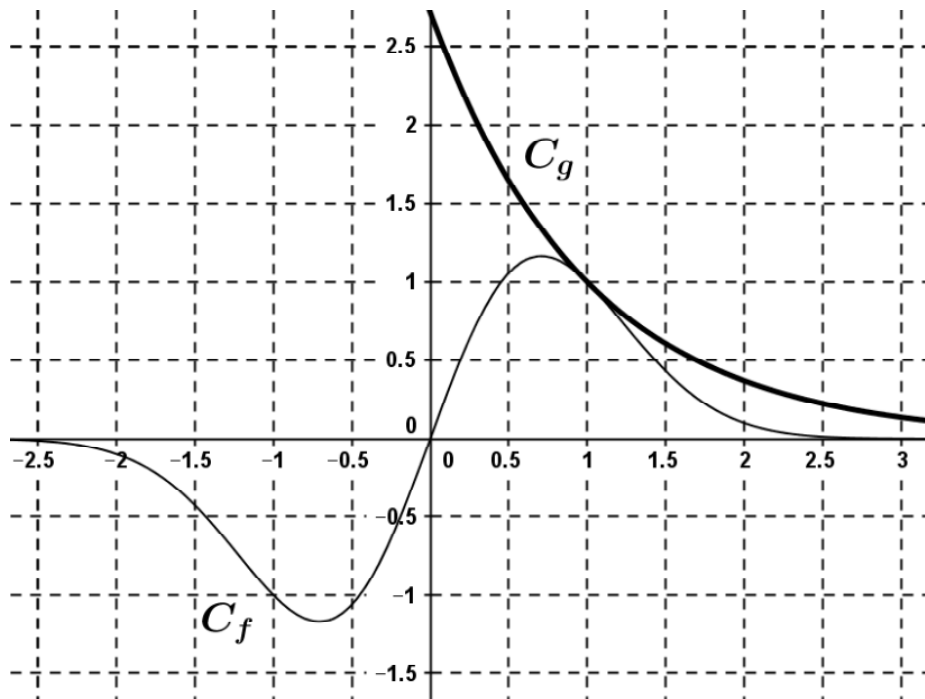
$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}.$$

- b. En déduire le tableau de variations de la fonction  $f$ .

## Partie B

On considère la fonction  $g$  définie pour tout réel  $x$  par  $g(x) = e^{1-x}$ .

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère du plan les courbes représentatives  $C_f$  et  $C_g$  respectivement des fonctions  $f$  et  $g$ .



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel  $x$  appartenant à  $] - \infty ; 0]$ ,  $f(x) < g(x)$ .
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

On pose, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$ .

- a. Montrer que, pour tout réel  $x$  strictement positif,

$$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

On admet pour la suite que  $f(x) = g(x)$  équivaut à  $\Phi(x) = 0$ .

- b. On admet que la fonction  $\Phi$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ . Dresser le tableau de variations de la fonction  $\Phi$ . (Les limites en 0 et  $+\infty$  ne sont pas attendues.)
  - c. En déduire que, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $\Phi(x) \leq 0$ .
- 4.
- a. La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?
  - b. Montrer que  $C_f$  et  $C_g$  ont un unique point commun, noté A.
  - c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

### Partie C

1. Trouver une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur  $\mathbf{R}$ .
2. En déduire la valeur de  $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx$ .
3. Interpréter graphiquement ce résultat.