Spé Maths
Terminale

Fonctions, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION, SYNTHÈSE 56

CORRECTION

Partie A: Cas général

1. Déterminons les variations de la vitesse de la goutte d'eau:

• Calculons V ':

Ici: • $V(t) = 9,81 \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

• $D_v = [\,0\,;+\infty\,[$.

V est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Ainsi, nous pouvons calculer V' pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$.

Pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$: $V'(t) = 9,81 \frac{m}{k}\left(\frac{k}{m}\, e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

$\Rightarrow$ $V'(t) = 9,81 \times e^{-\frac{k}{m}t}$.

Au total, pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$: $V'(t) = 9,81 \times e^{-\frac{k}{m}t} > 0$.

• Étudions le sens de variation de V sur $[\,0\,;+\infty\,[$:

Nous avons: • V est strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

(car sur $[\,0\,;+\infty\,[$, $V'(t) > 0$)

2. La goutte ralentit-elle au cours de sa chute ?

La goutte ne ralentit pas au cours de sa chute car V est strictement croissante sur $[\, 0\,;+\infty\,[$, ce qui signifie que la vitesse instantanée verticale augmente au cours de la chute de la goutte.

3. Montrons que $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t) = 9,81\,\dfrac{m}{k}$:

Il s'agit ici de calculer: $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(9,81\,\dfrac{m}{k} - \dfrac{9,81\,m}{e^{\frac{k}{m}t}} \right)$.

Or, d'après le cours: • $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{9,81\,m}{e^{\frac{k}{m}t}} = 0$ (Théorème des croissances comparées).

Ainsi: $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t) = 9,81\,\dfrac{m}{k}$.

Au total, nous avons bien: $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t) = 9,81\,\dfrac{m}{k}$.

4. L'affirmation est-elle correcte ?

Soient:
- V_{max}, la vitesse limite de la goutte, avec: $V_{max} = 9,81\,\dfrac{m}{k}$,
- V_G, la vitesse de la goutte quand $t = \dfrac{5\,m}{k}$, avec: $V_G = 9,81\,\dfrac{m}{k}\,(1 - e^{-5})$.

Nous avons: $V_G = 9,81\,\dfrac{m}{k} \times (0,9932)$

$= V_{max} \times (0,9932)$

$\Rightarrow V_G = 99,32\,\% \times V_{max} > 99\,\% \times V_{max}$.

Au total: **oui**, la vitesse de la goutte dépasse 99% de sa vitesse limite.

Partie B: Cas particulier

1. Déterminons depuis combien de temps la goutte s'est détachée de son nuage:

Il s'agit ici de résoudre l'équation: $V(t) = 15 \ m.s^{-1}$.

$$V(t) = 15 \iff 9,81 \times \left(\frac{6}{3,9}\right) \times \left(1 - e^{-\left(\frac{3,9}{6}\right) \times t}\right) = 15$$

$$\iff 15,09 \times e^{-0,65 \times t} = 0,09$$

$$\iff -0,65 \times t \approx \ln(0,006)$$

$$\implies t \approx 7,87 \text{ secondes.}$$

Au total, le temps écoulé depuis que la goutte s'est détachée de son nuage est d'environ: 7,87 secondes ou 7,8 secondes (au dixième de seconde).

2. Déduisons-en la vitesse moyenne ce cette goutte:

Soit " m ", la vitesse moyenne de V sur $[0; \mathbf{7,87}]$.

m est telle que: $m = \dfrac{1}{7,87 - 0} \displaystyle\int_0^{7,87} V(t)\, dt.$

Soit: $I = \displaystyle\int_0^{7,87} V(t)\, dt.$

V est continue sur $[0; 7,87]$, elle admet donc des primitives sur $[0; 7,87]$ et par conséquent: I existe.

$$I = \int_0^{7,87} 15,09\,(1 - e^{-0,65 \times t})\, dt$$

$$= 15,09 \left[t + \frac{1}{0,65} e^{-0,65 \times t} \right]_0^{7,87}$$

$$\implies I \approx 95,227.$$

D'où la vitesse moyenne de V sur [0 ; 7, 87] est:

$$m = \frac{1}{7,87 - 0} \times I \implies m \approx 12,1 \, m.s^{-1}.$$

Au total, la vitesse moyenne de cette goutte est d'environ: $12,1 \, m.s^{-1}$.