

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Fonctions, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A: Administration par voie intraveineuse

1. Déterminons la demi-vie $t_{0,5}$:

Il s'agit ici de déterminer t tel que: $f(t) = 10$.

$$f(t) = 10 \Leftrightarrow 20 e^{-0,1t} = 10$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,1t} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{0,1t} = 2$$

$$\Leftrightarrow 0,1t = \ln(2)$$

$$\Rightarrow t_{0,5} = 10 \times \ln(2).$$

Au total, la demi-vie est: $t_{0,5} = 10 \times \ln(2)$ cad $t_{0,5} \approx 6,9$ heures.

6,9 heures correspond en fait à: 6 heures et 54 minutes.

2. Déterminons le temps à partir duquel le médicament est éliminé:

Il s'agit ici de déterminer t tel que: $f(t) \leq 0,2$.

$$f(t) \leq 0,2 \Leftrightarrow 20 e^{-0,1t} \leq 0,2$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,1t} \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow e^{0,1t} \geq 100$$

$$\Leftrightarrow 0,1t \geq \ln(100)$$

$$\Rightarrow t \geq 10 \times \ln(100) \text{ ou } t \geq t^*, \text{ avec: } t^* = 10 \times \ln(100).$$

Au total, le temps à partir duquel le médicament sera éliminé est:

$$t^* = 10 \times \ln(100) \text{ cad } t^* \approx 46,1 \text{ heures (arrondi au dixième).}$$

46,1 heures correspond en fait à: 46 heures et 06 minutes.

3. Vérifions que l'ASC est égale à $200 \mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}$:

Il s'agit ici de calculer: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt$.

$$\text{Soit: } I = \int_0^x f(t) dt.$$

f est continue sur $[0; +\infty[$, elle admet donc des primitives sur $[0; +\infty[$ et par conséquent: I existe.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_0^x 20 e^{-0,1t} dt \\ &= 20 \times \left[-\frac{e^{-0,1t}}{0,1} \right]_0^x \Rightarrow I = 200 - \frac{200}{e^{0,1x}}. \end{aligned}$$

Dans ces conditions:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} I \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(200 - \frac{200}{e^{0,1x}} \right) \\ &= 200 \left(\text{d'après le cours: } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{200}{e^{0,1x}} = 0 \right). \end{aligned}$$

Au total, l'ASC est bien égale à: $200 \mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}$.

Partie B: Administration par voie orale

1. Démontrons que sur $[0; +\infty[$, $g'(t) = 20 e^{-t} (1 - 0,1 e^{0,9t})$:

Ici: • $g(t) = 20 (e^{-0,1t} - e^{-t})$

• $Dg = [0; +\infty[$.

Posons: $g = 20 (g_1 + g_2)$, avec: $g_1(t) = e^{-0,1t}$ et $g_2(t) = -e^{-t}$.

g_1 et g_2 sont dérivables sur \mathbb{R} comme fonctions "exponentielles", donc dérivables sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Dans ces conditions, $g_1 + g_2$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$.

Par conséquent, $g = 20 (g_1 + g_2)$ est dérivable sur $[0; +\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $t \in [0; +\infty[$.

Pour tout $t \in [0; +\infty[$: $g'(t) = 20 (-0,1 e^{-0,1t} + e^{-t})$

$$\Rightarrow g'(t) = 20 e^{-t} (1 - 0,1 e^{0,9t}).$$

Au total, pour tout $t \in [0; +\infty[$, nous avons bien: $g'(t) = 20 e^{-t} (1 - 0,1 e^{0,9t})$.

2. a. Étudions les variations de g sur $[0; +\infty[$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $t \in [0; +\infty[$:

• 1^{er} cas: $g'(t) = 0$.

$$g'(t) = 0 \text{ ssi } 1 - 0,1 e^{0,9t} = 0 \quad (20 e^{-t} > 0, \text{ pour tout } t \in [0; +\infty[)$$

$$\Leftrightarrow e^{0,9t} = 10$$

$$\Leftrightarrow 0,9t = \ln(10), \text{ cad: } t = \frac{\ln(10)}{0,9}$$

• 2^{ème} cas: $g'(t) < 0$.

$g'(t) < 0$ ssi $1 - 0,1e^{0,9t} < 0$ ($20e^{-t} > 0$, pour tout $t \in [0; +\infty[$)

$$\Leftrightarrow e^{0,9t} > 10, \text{ cad: } t > \frac{\ln(10)}{0,9}$$

• 3^{ème} cas: $g'(t) > 0$.

$g'(t) > 0$ ssi $1 - 0,1e^{0,9t} > 0$ ($20e^{-t} > 0$, pour tout $t \in [0; +\infty[$)

$$\Leftrightarrow e^{0,9t} < 10, \text{ cad: } t < \frac{\ln(10)}{0,9}$$

Au total:

- g est croissante sur $\left[0; \frac{\ln(10)}{0,9}\right]$,
(car sur $\left[0; \frac{\ln(10)}{0,9}\right]$, $g'(t) \geq 0$)
- g est décroissante sur $\left[\frac{\ln(10)}{0,9}; +\infty\right[$.
(car sur $\left[\frac{\ln(10)}{0,9}; +\infty\right[$, $g'(t) \leq 0$)

2. b. Dressons le tableau de variations de g :

t	0	$\frac{\ln(10)}{0,9}$	$+\infty$
g'	+	0	-
g	a	b	c

(Note: In the original image, arrows point from 'a' to 'b' and from 'b' to 'c' in the third row.)

Avec: • $a = g(0) \Rightarrow a = 0,$

• $b = g\left(\frac{\ln(10)}{0,9}\right) \Rightarrow b \approx 13,94,$

• $c = \dots$

2. c. Déduisons-en la durée après laquelle la concentration est maximale:

D'après le tableau de variations, le maximum de g est atteint au point:

$$\left(\frac{\ln(10)}{0,9}; g\left(\frac{\ln(10)}{0,9}\right)\right).$$

Or: $\frac{\ln(10)}{0,9} \approx 2,56$ heures.

Au total, la durée après laquelle la concentration est maximale est:

$$t_{\max} \approx 2,56 \text{ heures.}$$

2,56 heures correspond en fait à: 2 heures et 34 minutes.