Spé Maths
Terminale

Fonctions, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION, SYNTHÈSE 54

CORRECTION

1. Démontrons que la tangente en M à Cf est perpendiculaire à la tangente en N à Cg:

Soient: • $y = ax + b$, l'équation de la tangente **(D)** en M à Cf,

• $y = cx + d$, l'équation de la tangente **(D ')** en N à Cg.

D'après le cours: • D et D ' sont parallèles ssi $a = c$

• D et D ' sont perpendiculaires ssi $a \times c = -1$.

Ici, il s'agit donc de déterminer les équations respectives des 2 tangentes.

L'équation de la tangente en M à Cf:

• Ici: • $f(x) = e^x$

• $Df = IR$.

f est dérivable sur IR comme fonction " exponentielle ".

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in IR$.

Pour tout $x \in IR$: $f'(x) = e^x$.

• **(D)** est tangente à Cf au point $M(a\,;f(a))$ cad $M(a\,;e^a)$.

• D'où, l'équation de la droite **(D)** est:

$y - y_M = f'(M)\,(x - x_M) \iff y - e^a = f'(a)\,(x - a)$

$\Rightarrow y = e^a \times x + e^a\,(1 - a)$.

Ainsi: • l'équation de la tangente **(D)** est: $y = e^a \times x + e^a\,(1 - a)$,

• **(D)** a pour coefficient directeur: e^a.

L'équation de la tangente en N à Cg:

• Ici: • $g(x) = e^{-x}$

• $Dg = I\!R$.

g est dérivable sur IR comme fonction " exponentielle ".

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in I\!R$.

Pour tout $x \in I\!R$: $g'(x) = -\,e^{-x}$.

• **(D ')** est tangente à Cg au point $N\,(a\,;\,g(a))$ cad $N\,(a\,;\,e^{-a})$.

• D'où, l'équation de la droite **(D ')** est:

$y - y_N = f'(N)\,(x - x_N) \iff y - e^{-a} = g'(a)\,(x - a)$

$\Rightarrow y = (-\,e^{-a}) \times x + e^{-a}\,(1 + a)$.

Ainsi: • l'équation de la tangente **(D ')** est: $y = (-\,e^{-a}) \times x + e^{-a}\,(1 + a)$,

• **(D ')** a pour coefficient directeur: $-\,e^{-a}$.

Au total, comme: $(e^a) \times (-\,e^{-a}) = -1$, $D \perp D'$.

2. a. Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?

La conjecture que nous pouvons émettre sur la longueur PQ est:

" a priori, il semble, que pour tout réel a, la longueur PQ est constante et égale à 2 ".

2. b. Démontrons cette conjecture:

Il s'agit ici de montrer que, pour tout réel a, la longueur $PQ = 2$.

Pour ce faire, nous devons déterminer les coordonnées des points P et Q.

D'après 1.: • l'équation de la tangente est: $y = e^a \times x + e^a (1 - a)$ (1)

• l'équation de la tangente est: $y = (- e^{-a}) \times x + e^{-a} (1 + a)$. (2)

Or: • $y_p = 0 \Rightarrow x_p = a - 1$, d'après (1),

• $y_q = 0 \Rightarrow x_q = 1 + a$, d'après (2).

Et donc, la longueur PQ est: $PQ = |x_q - x_p| \Rightarrow PQ = 2$.

Au total, pour tout réel a, nous avons toujours: $PQ = 2$.