Spé Maths
Terminale

Fonctions, Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

FONCTION

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.

On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint.

La température du four est exprimée en degré Celsius (°C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70 °C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

Partie A

Pour un nombre entier naturel n, on note T_n la température en degré Celsius du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc $T_0 = 1\,000$.

La température T_n est calculée par l'algorithme suivant :

```
T ← 1000
Pour i allant de 1 à n
        T ← 0,82 × T + 3,6
Fin Pour
```

1. Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement.
2. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $T_n = 980 \times 0{,}82^n + 20$.
3. Au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

Partie B

Dans cette partie, on note t le temps (en heure) écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.
La température du four (en degré Celsius) à l'instant t est donnée par la fonction f définie, pour tout nombre réel t positif, par : $f(t) = a\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + b$, où a et b sont deux nombres réels.

On admet que f vérifie la relation suivante : $f'(t) + \frac{1}{5} f(t) = 4$.

1. Déterminer les valeurs de a et b sachant qu'initialement, la température du four est de 1 000 °C, c'est-à-dire que $f(0) = 1\,000$.

2. Pour la suite, on admet que, pour tout nombre réel positif t : $f(t) = 980\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + 20$.

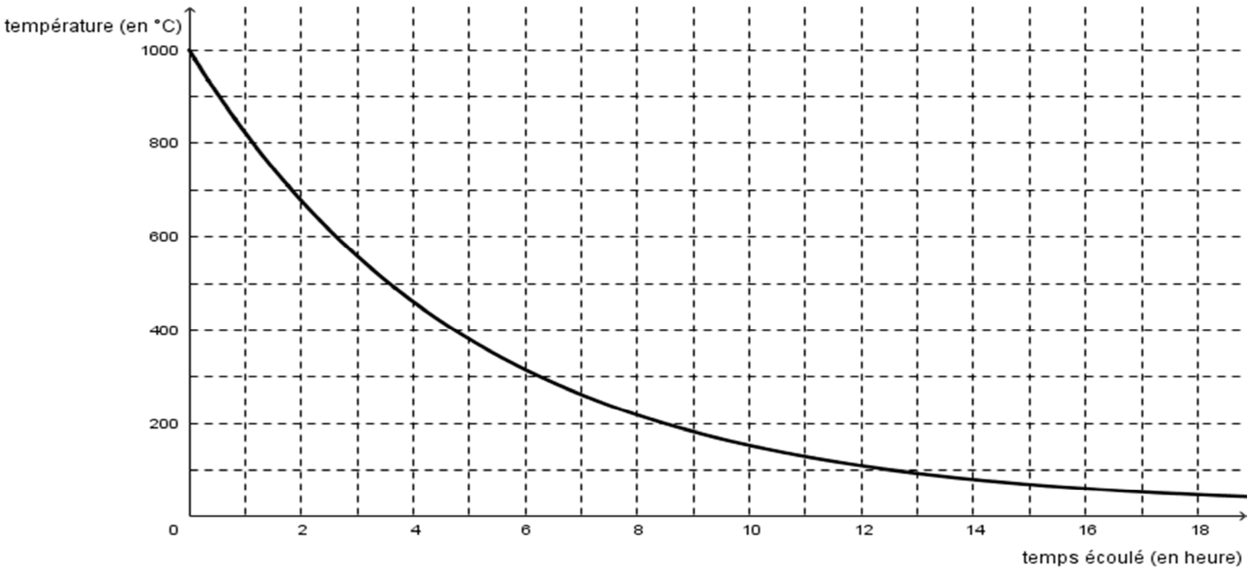
a. Déterminer la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$.

b. Étudier les variations de f sur $\left[0\,;+\infty\right[$. En déduire son tableau de variations complet.

c. Avec ce modèle, après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

3. La température moyenne (en degré Celsius) du four entre deux instants t_1 et t_2 est donnée par : $\dfrac{1}{t_2 - t_1}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. À l'aide de la représentation graphique de f ci-dessous, donner une estimation de la température moyenne θ du four sur les 15 premières heures de refroidissement. Expliquer votre démarche.



b. Calculer la valeur exacte de cette température moyenne θ et en donner la valeur arrondie au degré Celsius.

4. Dans cette question, on s'intéresse à l'abaissement de température (en degré Celsius) du four au cours d'une heure, soit entre deux instants t et $(t+1)$. Cet abaissement est donné par la fonction d définie, pour tout nombre réel t positif, par : $d(t) = f(t) - f(t+1)$.

a. Vérifier que, pour tout nombre réel t positif : $d(t) = 980\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}}$.

b. Déterminer la limite de $d(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
Quelle interprétation peut-on en donner ?