Spé Maths
Terminale

Fonctions, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION, SYNTHÈSE 51

CORRECTION

1. Déterminons une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[\, 0 \,; +\infty \,[$:

Ici: • $f(x) = ke^{-kx}$

• $Df = [\, 0 \,; +\infty \,[$.

Sur l'intervalle $[\, 0 \,; +\infty \,[$, la fonction F est une primitive de la fonction f ssi:

$$F'(x) = f(x).$$

Pour $x \in [\, 0 \,; +\infty \,[$, prenons: $F(x) = -\, e^{-kx}$.

F est bien une primitive de f sur $[\, 0 \,; +\infty \,[$ car:

$F'(x) = -\,(-k)\, e^{-kx}$ <=> $F'(x) = ke^{-kx}$ cad: $F'(x) = f(x)$.

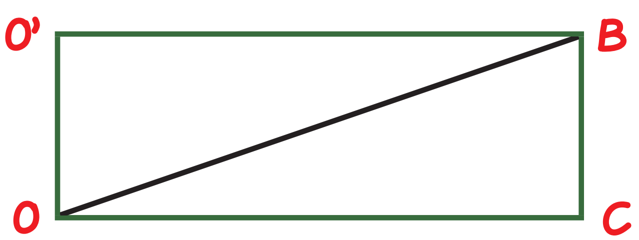
Ainsi, une primitive de la fonction f sur $[\, 0 \,; +\infty \,[$ est: $F(x) = -\, e^{-kx}$.

2. a. Exprimons l'aire du triangle OCB en fonction de k:

Le triangle OCB est rectangle en C.

L'aire du triangle OCB est égale à la moitié de l'aire du rectangle OO'BC,

O' étant le point de coordonnées: $x_{O'} = 0$ et $y_{O'} = ke^{-0 \times k} = k$.



, avec:

• $O\,(0 \,; 0)$

• $O'\,(0 \,; k)$

• $B\,(1 \,; ke^{-k})$.

• $C\,(1 \,; 0)$

Or, l'aire du rectangle OO'BC est: $\mathcal{A}_R = OC \times BC$

$= 1 \times ke^{-k}$.

Dans ces conditions, l'aire du triangle OCB est: $\mathcal{A}_T = \dfrac{ke^{-k}}{2}$.

Au total, en fonction de k, l'aire du triangle OCB est: $\mathcal{A}_T = \dfrac{ke^{-k}}{2}$.

2. b. Exprimons, en fonction de k, l'aire du domaine $\mathcal{D}$:

L'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par l'axe des ordonnées, la courbe $\mathcal{C}_f$ et le segment [OB] est égale à:

$$\mathcal{A}_D = \left(\int_0^1 f(x)\,dx \right) - \mathcal{A}_T.$$

La fonction f est continue sur [0; 1], elle admet donc des primitives sur [0; 1]

et par conséquent: $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe.

Ici: $\int_0^1 f(x)\,dx = [\,F(x)\,]_0^1$

$= [\,-e^{-kx}\,]_0^1$

$= (-e^{-k}) - (-e^0)$

$= 1 - e^{-k}$.

Ainsi, l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est: $\mathcal{A}_D = (1 - e^{-k}) - \left(\dfrac{ke^{-k}}{2}\right)$

$= \dfrac{2 - 2e^{-k} - ke^{-k}}{2}$.

Au total, l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est: $\mathcal{A}_D = \dfrac{2 - 2e^{-k} - ke^{-k}}{2}$ u.a.

3. Montrons qu'il existe une unique valeur du réel $k > 0$ telle que l'aire du domaine $\mathcal{D}$ vaut le double de celle du triangle OCB:

L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est égale au double de celle du triangle OCB quand:

$$\mathcal{A}_D = 2 \times \mathcal{A}_T.$$

$$\mathcal{A}_D = 2 \times \mathcal{A}_T \iff \frac{2 - 2e^{-k} - ke^{-k}}{2} = 2 \times \left(\frac{ke^{-k}}{2}\right)$$

$$\iff 2 - 2e^{-k} - ke^{-k} = 2ke^{-k}$$

$$\iff \mathbf{-3ke^{-k} - 2e^{-k} + 2 = 0}.$$

Soit la fonction g définie sur $[\,0\,; +\infty\,[$ par: $g(k) = -3ke^{-k} - 2e^{-k} + 2$.

Il s'agit de montrer que l'équation $g(k) = 0$ admet une unique solution strictement positive que nous noterons: θ.

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a\,; b]$.

  Pour tout réel " w " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a\,; b]$ tel que: $f(c) = w$.

  Cela signifie que: l'équation $f(x) = w$ admet au moins une solution appartenant à $[a\,; b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a\,; b]$, l'équation $f(x) = w$ admet une unique solution appartenant à $[a\,; b]$.

Ici:
- g est continue sur $[\,0\,; +\infty\,[$, donc sur $\left]\frac{1}{3}\,; +\infty\right[$.
- " $w = 0$ " est compris entre: $g\left(\frac{1}{3}\right) \approx -0,15$

et: $\lim\limits_{k \to +\infty} g(k) = 2$, car: $\lim\limits_{k \to +\infty} e^{-k} = 0$.

• g est strictement croissante sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$ car pour tout $k \in]\frac{1}{3}; +\infty[$:

$$g'(k) = -e^{-k} + 3ke^{-k} > 0.$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $g(k) = 0$ $(w = 0)$ admet une unique solution θ appartenant à $]\frac{1}{3}; +\infty[$. Donc $\theta > 0$.

Au total: $g(k) = 0$ admet une unique solution θ sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$ et elle est donc strictement positive.