Spé Maths
Terminale

Fonctions, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION, SYNTHÈSE 50

CORRECTION

1. a. Calculons $f(20)$:

Ici: • $f(t) = (0,8\,t + 0,2)\,e^{-0,5t} + 0,03$

• $Df = [\,0\,;\,20\,]$.

Dans ces conditions: $f(20) = (0,8 \times 20 + 0,2)\,e^{-0,5 \times 20} + 0,03$

$= 16,2\,e^{-10} + 0,03$

$\approx 0,031$.

Ainsi: $f(20) \approx 0,031$.

Cela signifie que le taux de CO_2 au bout de 20 minutes est d'environ **3,1%**.

1. b. Déterminons le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience:

D'après le tableau de variation de la fonction f sur $[\,0\,;\,20\,]$, nous constatons que le maximum de f est atteint au point $\mathbf{M\,(1,75\,;\,f\,(1,75))}$.

Or: $f(1,75) \approx 0,697$.

Ainsi: le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience est d'environ 69,7%.

2. a. Justifions qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition:

Il s'agit de démontrer que l'équation $V = f(t) = 3,5\%$ admet une unique solution strictement positive que nous noterons: **T**.

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.

  Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a;b]$ tel que: $f(c) = K$.

  Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a;b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a;b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a;b]$.

Ici:
- f est continue sur $[0;20]$, donc sur $]1,75;20]$.
- " $k = 3,5\%$ " est compris entre: $f(20) \approx 3,1\%$

  et: $f(1,75) \approx 69,7\%$.
- f est strictement décroissante sur $]1,75;20]$, d'après le tableau de variation de f.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(t) = 3,5\%$ $(k = 3,5\%)$ admet une unique solution **T** appartenant à $]1,75;20]$.

Au total: $f(t) = 3,5\%$ admet une unique solution **T** sur $]1,75;20]$.

2. b. b1. **Déterminons la valeur de la variable t à la fin de l'algorithme:**

En programmant cet algorithme sur la calculatrice, nous obtenons comme valeur de la variable t à la fin de l'algorithme: $t = 15,75$ minutes.

En effet:
- $f(15,65) \approx 0,0351 > 3,5\%$
- $f(15,75) \approx 0,03487 < 3,5\%$.

2. b. b2. **Que représente cette valeur dans le cadre de l'exercice ?**

Cela signifie que: **le taux de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience est inférieur ou égal à 3,5% au delà de 15,75 minutes.**

Notons que: 15,75 minutes = 15 minutes et 45 secondes.

3. a. **Montrons que F est une primitive de f sur $[0; 11]$:**

Sur l'intervalle $[0; 11]$, F est une primitive de f ssi: $F'(t) = f(t)$.

Or ici, pour tout $t \in [0; 11]$:

$$F'(t) = (-1,6 \times e^{-0,5t}) + ((-1,6t - 3,6) \times (-0,5\, e^{-0,5t})) + 0,03$$

$$= 0,8t\, e^{-0,5t} + 0,2\, e^{-0,5t} + 0,03$$

$$= (0,8t + 0,2)\, e^{-0,5t} + 0,03$$

$$= f(t).$$

Au total, pour tout $t \in [0; 11]$: F est bien une primitive de f car $F'(t) = f(t)$.

3. b. **Déduisons-en le taux moyen V_m, valeur moyenne de f sur $[0; 11]$:**

Soit " V_m ", le taux moyen au valeur moyenne de f sur $[0; 11]$.

V_m est tel que: $V_m = \dfrac{1}{11 - 0} \displaystyle\int_0^{11} f(x)\, dx.$

Or: $\dfrac{1}{11-0}\displaystyle\int_0^{11} f(x)\,dx = \dfrac{1}{11}\left[\,F(x)\,\right]_0^{11}$

$$= \frac{1}{11}\left(F(11) - F(0)\right)$$

$$\approx 34,9\% \text{ arrondi à } 0,1\%.$$

Au total: le taux moyen V_m est d'environ 34, 9%.

Cela signifie que le taux moyen de CO_2, dans le local pendant l'expérience, est d'environ 34, 9% pendant les 11 premières minutes.