Spé Maths
Terminale

Fonctions, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION, SYNTHÈSE 5

CORRECTION

1. La bonne réponse est: B.

En effet: $f'(x) \leqslant 0 \iff \dfrac{-5 \ln x}{x^2} \leqslant 0$

$\iff -5 \ln x \leqslant 0$, car sur $[0,5 ; 5]$: $x^2 \neq 0$

$\iff \ln x \geqslant 0$

$\iff x \geqslant e^0$ cad: $x \geqslant 1$ ou: $x \in [1 ; 5]$.

Ainsi: f' est négative ou nulle sur l'intervalle $[1 ; 5]$.

2. La bonne réponse est: A.

En effet, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est: $f'(e)$, car: $B(e ; f(e))$.

Or: $f'(e) = \dfrac{-5 \ln(e)}{e^2}$ cad: $f'(e) = \dfrac{-5}{e^2}$.

Ainsi, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est:

$$f'(e) = \frac{-5}{e^2}.$$

3. La bonne réponse est: C.

En effet, pour connaître le sens de variation de la fonction f', nous devons déterminer le signe de la fonction f''.

Or: $f''(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{10 \ln x - 5}{x^3} \geqslant 0$

$\iff 10 \ln x - 5 \geqslant 0$, car sur $[0,5 ; 5]$: $x^2 \neq 0$

$\iff \ln x \geqslant \dfrac{1}{2}$

$\iff x \geqslant e^{\frac{1}{2}}$ cad: $x \in [e^{\frac{1}{2}} ; 5]$.

Or: $[2 ; 5]$ est un intervalle inclus dans $[e^{\frac{1}{2}} ; 5]$.

Par conséquent: la fonction f' est croissante sur $[2 ; 5]$.

4. La bonne réponse est: C.

En effet, comme le point A $(x_A ; f(x_A))$ est un point d'inflexion: $f''(x_A) = 0$.

Or: $f''(x_A) = 0 \iff \dfrac{10 \ln (x_A) - 5}{(x_A)^3} = 0$

$\iff 10 \ln (x_A) - 5 = 0$, car sur $[0,5 ; 5]$: $(x_A)^3 \neq 0$

$\iff \ln (x_A) = \dfrac{1}{2}$

$\iff x_A = e^{\frac{1}{2}}$ et donc: $A\,(e^{\frac{1}{2}} ; f(e^{\frac{1}{2}}))$.

Ainsi, la valeur exacte de l'abscisse du point A est: $x_A = e^{\frac{1}{2}}$.

5. La bonne réponse est: A.

En effet, en comptant le nombre de carreaux contenu dans l'aire $\mathcal{A}$, domaine du plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$, nous obtenons: plus de 23 carreaux.

Or : une unité d'aire correspond à deux carreaux.

Donc nous devons diviser par 2.

Ainsi, un seul encadrement possible : $10 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 15$.