

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Fonctions, Synthèse



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

FONCTION

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_1 et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par la relation :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

Partie A

1. Vérifier, en détaillant le calcul, que si $u_1 = 0$ alors $u_4 = -17$.
2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'en saisissant préalablement dans U une valeur de u_1 , il calcule les termes de la suite (u_n) de u_2 à u_{13} .

```

Pour N allant de 1 à 12
    U ←
Fin Pour
    
```

3. On a exécuté cet algorithme pour $u_1 = 0,7$ puis pour $u_1 = 0,8$.
Voici les valeurs obtenues.

Pour $u_1 = 0,7$	Pour $u_1 = 0,8$
0,4	0,6
0,2	0,8
-0,2	2,2
-2	10
-13	59
-92	412
-737	3295
-6634	29654
-66341	296539
-729752	3261928
-8757025	39143135
-113841326	508860754

Quelle semble être la limite de cette suite si $u_1 = 0,7$? Et si $u_1 = 0,8$?

Partie B

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n , supérieur ou égal à 1, par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

On rappelle que le nombre e est la valeur de la fonction exponentielle en 1, c'est-à-dire que $e = e^1$.

1. Prouver que la fonction F définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $F(x) = (-1-x)e^{1-x}$ est une primitive sur l'intervalle $[0;1]$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = xe^{1-x}$.
2. En déduire que $I_1 = e - 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

Utiliser cette formule pour calculer I_2 .

4. a) Justifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;1]$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.

b) Justifier que : $\int_0^1 x^n e dx = \frac{e}{n+1}$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.

d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Partie C

Dans cette partie, on note $n!$ le nombre défini, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par :

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ 2! &= 2 \times 1 \\ \text{et si } n \geq 3 : \\ n! &= n \times (n-1) \times \dots \times 1 \end{aligned}$$

On a ainsi par exemple

$$\begin{aligned} 3! &= 3 \times 2 \times 1 = 3 \times (2 \times 1) = 3 \times 2! \\ 4! &= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times (3 \times 2 \times 1) = 4 \times 3! \\ 8! &= 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8 \times (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 8 \times 7! \end{aligned}$$

Et, plus généralement :

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_n = n!(u_1 - e + 2) + I_n.$$

On rappelle que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \text{ et } I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

2. On admet que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$.

a) Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0,7$.

b) Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0,8$.