

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Fonctions, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. a. Déterminons la limite de la fonction f en $+\infty$:

Ici: • $f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $(u - \frac{1}{2}(e^v + e^w))$

• $Df = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \right)$$

Or: • $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

D'où: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(+\infty + 0)$
 $= -\infty$.

Au total: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

1. b. Montrons que f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$:

Pour ce faire, nous allons calculer la dérivée de f sur \mathbb{R} .

Posons: $f = f_1 - \frac{1}{2}(f_2 + f_3)$, avec: $f_1(x) = \frac{7}{2}$, $f_2(x) = e^x$ et $f_3(x) = e^{-x}$.

f_1 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme.

f_2 et f_3 sont dérivables sur \mathbb{R} comme fonction "exponentielle".

Dans ces conditions, la fonction $h = f_2 + f_3$ est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} .

Et donc, la fonction $g = -\frac{1}{2}(f_2 + f_3)$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Par conséquent, f est dérivable sur \mathbb{R} comme somme ($f_1 + g$) de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} .

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ($u' - \frac{1}{2}(v'e^v + w'e^w)$)

Distinguons 2 cas pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• 1^{er} cas: $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) \geq 0 \iff -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \geq 0 \iff e^x \leq e^{-x} \iff x \leq -x \iff x \leq 0$$

ou: $x \in]-\infty; 0]$.

• 2^{ème} cas: $f'(x) \leq 0$.

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \leq 0 \iff e^x \geq e^{-x} \iff x \geq -x \iff x \geq 0$$

ou: $x \in [0; +\infty[$.

Au total: • f est croissante sur $] -\infty; 0]$,

• f est décroissante sur $[0; +\infty [$.

f est même strictement décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty [$.

1. c. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0; +\infty[$:

Nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour pouvoir répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement "croissante" ou "décroissante" sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une **unique** solution appartenant à $[a; b]$.

Ici: • f est continue sur \mathbb{R} , donc sur $[0; +\infty[$.

• " $k = 0$ " est compris entre: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty < 0$

$$\text{et: } f(0) = \frac{5}{2} > 0.$$

• f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet une **unique** solution α appartenant à $[0; +\infty[$.

2. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans \mathbb{R} qui sont opposées:

Préalablement, nous remarquons que pour tout réel x :

$$f(-x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-(-x)}) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) = f(x).$$

On dit que la fonction f est paire.

Nous pouvons donc écrire: $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = 0$.

Dans ces conditions: comme l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$, l'équation $f(-x) = 0$ admet donc une unique solution sur $[0; +\infty[$, ce qui équivaut à dire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $] -\infty; 0]$.

Et nous pouvons noter: $f(\alpha) = f(-\alpha) = 0$, avec: $\alpha \in [0; +\infty[$ et $-\alpha \in]-\infty; 0]$.

Au total, l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans \mathbb{R} :

- $\alpha \in [0; +\infty[$,
- $\beta = -\alpha \in]-\infty; 0]$.

Partie B:

1. Calculons la hauteur d'un arceau:

Ici: • $f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

• $Df = [-\alpha; \alpha]$, avec: $\alpha \in [0; +\infty[$.

La hauteur d'un arceau correspond à $f(0)$. (maximum de la fonction f)

Or: $f(0) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^0 + e^{-0})$ cad: $f(0) = \frac{5}{2} = 2,5$ mètres.

Ainsi, la hauteur d'un arceau est de: 2,5 mètres.

2. a. Montrons que, pour tout réel x , $1 + (f'(x))^2 = \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2$:

Nous savons que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -\frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$.

$$\begin{aligned} \text{D'où: } 1 + (f'(x))^2 &= 1 + \frac{1}{4} (e^x - e^{-x})^2 \\ &= 1 + \frac{1}{4} (e^{2x} + e^{-2x} - 2) \\ &= \frac{4 + e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} \\ &= \frac{2 + e^{2x} + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2. \end{aligned}$$

Au total, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons bien: $1 + (f'(x))^2 = \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2$.

2. b. b1. Déduisons-en la valeur de l'intégrale I en fonction de α :

D'après l'énoncé, la longueur de la courbe \mathcal{C} sur l'intervalle $[0; \alpha]$ est donnée, en mètre, par:

$$I = \int_0^\alpha \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

Le calcul de I donne: $I = \int_0^\alpha \sqrt{\frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2} \, dx$

$$\Leftrightarrow I = \int_0^\alpha \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \, dx$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2} [(e^x - e^{-x})]_0^\alpha$$

cad: $I = \frac{1}{2} e^\alpha - \frac{1}{2} e^{-\alpha}$ mètres.

Ainsi, la valeur de I en fonction de α est: $I = \frac{1}{2} (e^\alpha - e^{-\alpha})$ mètres.

2. b. b2. Montrons que la longueur d'un arceau est $L = e^\alpha - e^{-\alpha}$:

La valeur exacte de la longueur L d'un arceau sur $[-\alpha; \alpha]$ est: $L = 2I$.

D'où: $L = e^\alpha - e^{-\alpha}$.

Ainsi, la longueur d'un arceau est bien: $L = e^\alpha - e^{-\alpha}$.

Partie C:

1. Montrons que $\mathcal{A} = 4 \int_0^\alpha f(x) dx - 2$:

La quantité de bâche nécessaire pour recouvrir la façade nord est:

$$\mathcal{A}_1 = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx.$$

La quantité de bâche nécessaire pour recouvrir la façade sud est:

$$\mathcal{A}_2 = \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx \right) - (1 \times 2).$$

($1 \times 2 = 1$ mètre \times 2 mètres = aire ouverture)

Ainsi: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$

$$= \left(2 \times \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx \right) - 2.$$

Or: f est paire.

Par conséquent: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \times \int_0^{\alpha} f(x) dx$, d'après le cours.

D'où: $\mathcal{A} = \left(4 \times \int_0^\alpha f(x) dx \right) - 2.$

Au total, nous avons bien: $\mathcal{A} = \left(4 \times \int_0^\alpha f(x) dx \right) - 2.$

2. Déterminons, au m^2 près, l'aire totale de la bâche nécessaire:

Soit \mathcal{A}_T , l'aire totale de la bâche nécessaire pour réaliser cette serre.

$\mathcal{A}_T = \mathcal{A} + S$, S étant l'aire de la partie de forme rectangulaire recouvrant le toit de la serre.

Or: • $\mathcal{A} = \left(4 \times \int_0^\alpha f(x) dx \right) - 2$

$$= 4 \times \left[\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right]_0^\alpha - 2$$

$$= 4 \times \left(\frac{7}{2}\alpha - \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha}) \right) - 2$$

$$= 14\alpha - 2(e^\alpha - e^{-\alpha}) - 2.$$

• $S = (3 \times 1,50) \times L$

(4 arceaux espacés de 1,5 mètres, donc: $3 \times 1,50$)

$$= 4,5 \times (e^\alpha - e^{-\alpha}).$$

Avec: $\alpha = 1,92$: $\mathcal{A} = 14\alpha - 2(e^\alpha - e^{-\alpha}) - 2 + 4,5(e^\alpha - e^{-\alpha})$

$$= 14\alpha + 2,5(e^\alpha - e^{-\alpha}) - 2$$

$$= (14 \times 1,92) + 2,5(e^{1,92} - e^{-1,92}) - 2$$

$$\approx 42 \text{ m}^2.$$

Ainsi, l'aire totale demandée est d'environ: 42 m^2 .