

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Fonctions, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A: Étude Graphique

1. Déterminons la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal:

Pour répondre à cette question, graphiquement, il suffit de prendre le minimum de la courbe (C) (qui correspond en fait au minimum de la fonction C).

Une lecture graphique nous donne: $x_{\min} \approx 4,5$ tonnes.

Au total, le coût quotidien de l'entreprise est minimal quand: la quantité de granulés produite est de 4,5 tonnes.

2. a. Déterminons $C(6)$, $R(6)$ et $D(6)$:

Graphiquement: $\left. \begin{array}{l} \bullet C(6) = 5 \\ \bullet R(6) = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow D(6) = R(6) - C(6) = 13.$

Au total, une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés est de: 1300 € (1800 € - 500 €).

2. b. Déterminons les quantités possibles de granulés en tonnes, pour que l'entreprise dégage un bénéfice:

L'entreprise dégage un bénéfice ssi: $D(x) > 0$.

Or: $D(x) > 0$ ssi: $R(x) - C(x) > 0$, cad ssi: $R(x) > C(x)$.

Graphiquement, $R(x) > C(x)$ quand: $x \in]2,8; 13,3[$.

Au total, pour dégager un bénéfice, l'entreprise doit produire une quantité de granulés comprise entre: 2,8 tonnes et 13,3 tonnes.

Partie B: Étude d'une fonction

1. a. Calculons g' pour tout $x \in [1;15]$:

Ici: • $g(x) = -0,6x + 4 + e^{-x+5}$

• $Dg = [1;15]$.

Posons: $g = g_1 + g_2$, avec: $g_1(x) = -0,6x + 4$ et $g_2(x) = e^{-x+5}$.

g_1 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[1;15]$.

g_2 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction "exponentielle", donc dérivable sur l'intervalle $[1;15]$.

Par conséquent, g est dérivable sur $[1;15]$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $[1;15]$.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in [1;15]$.

Pour tout $x \in [1;15]$: $g'(x) = -0,6 - e^{-x+5}$.

Au total: $g'(x) = -0,6 - e^{-x+5}$.

1. b. Déduisons-en que g est décroissante sur $[1;15]$:

g est décroissante sur $[1;15]$ ssi: pour tout $x \in [1;15]$, $g'(x) \leq 0$.

$$g'(x) \leq 0 \text{ ssi: } -0,6 - e^{-x+5} \leq 0$$

$$\text{cad ssi: } e^{-x+5} \geq -0,6 \quad (a).$$

Or (a) est toujours vérifié car: pour tout $x \in [1;15]$, $e^{-x+5} > 0$.

Au total: g est décroissante sur $[1;15]$.

2. a. Dressons le tableau de variation de g sur $[1;15]$:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	1	15
g'	-	
g	a	b

Avec: • $a = g(1) \Rightarrow a = 3,4 + e^4 > 0$,

• $b = g(15) \Rightarrow b = -5 + e^{-10} < 0$.

Au total: • Nous venons de dresser le tableau de variation de g sur $[1;15]$.

• Arrondies à l'unité: $g(1) \approx 58$ et $g(15) \approx -5$.

2. b. Donnons la solution unique de l'équation $g(x) = 0$ dans l'intervalle $[1;15]$:

Comme g est strictement décroissante sur $[1;15]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution appartenant à $[1;15]$.

Soit α , cette solution unique: $\alpha \in [6;7]$.

Par tâtonnement, on trouve, comme valeur arrondie de α à 10^{-1} près: $\alpha \approx 6,9$.

Au total, l'équation $g(x)$ admet comme solution unique dans l'intervalle $[1;15]$:

$$\alpha \approx 6,9.$$

2. c. Déduisons-en le tableau de signe de $g(x)$ sur $[1;15]$:

Nous avons le tableau de signes de g suivant:

x	1	α	15
g	+	0	-

Partie C: Application économique

1. Montrons que pour tout réel $x \in [1;15]$, $D(x) = -0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}$:

Nous savons que: $D(x) = R(x) - C(x)$.

Par conséquent: $D(x) = 3x - (0,3x^2 - x + e^{-x+5})$

$$\Rightarrow D(x) = -0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}.$$

Au total, nous avons bien: $D(x) = -0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}$.

2. Montrons que $D'(x) = g(x)$, pour tout réel $x \in [1;15]$:

D'après l'énoncé, D est dérivable sur $[1;15]$.

Ainsi, nous pouvons calculer D' pour tout $x \in [1;15]$.

Pour tout $x \in [1;15]$: $D'(x) = -0,6x + 4 + e^{-x+5} \Rightarrow D'(x) = g(x)$.

Au total: pour tout réel $x \in [1;15]$, $D'(x) = g(x)$.

3. Déduisons-en le tableau de variation de D sur $[1;15]$:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	1	$\alpha = 6,9$	15
D'	+	0	-
D	a	b	c

Diagramme du tableau de variation: des flèches pointent de a vers b et de b vers c .

Avec: • $a = D(1) \Rightarrow a \approx -50,90$,

• $b = D(6,9) \Rightarrow b \approx 13,17$,

• $c = D(15) \Rightarrow c \approx -7,50$.

Au total, nous venons de dresser le tableau de variation de D sur $[1;15]$.

4. a. Déterminons la quantité de granulés pour que le bénéfice soit maximal:

La fonction D admet un maximum au point: $M(\alpha; D(\alpha))$.

Avec: $\alpha = 6,9$ tonnes de granulés, l'entreprise dégagera un bénéfice maximal.

4. b. Déterminons ce bénéfice maximal:

Soit D_{\max} , ce bénéfice maximal, $D_{\max} = D(6,9)$.

Or: $D(6,9) \approx 13,17$ à 10^{-2} près.

Au total, le bénéfice maximal dégagé par l'entreprise est de: 13170 €.