# Spé Maths
## Terminale

# Fonctions, Synthèse

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE

# FONCTION, SYNTHÈSE 41

## CORRECTION

### Partie A:

**1. Encadrons chacune des solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0; 7]$:**

L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0; 7]$.

Soient $x_1$ et $x_2$ ces deux solutions.

Les deux encadrements (par 2 entiers consécutifs) des solutions $x_1$ et $x_2$ sont respectivement: $[0; 1]$ et $[2; 3]$.

**2. Donnons le maximum de $f$ sur l'intervalle $[0; 7]$ en précisant la valeur en laquelle il est atteint:**

La fonction $f$ atteint son maximum quand: $x = 1$.

Quand $x = 1$: $f(1) \approx 14,8$.

Au total: $f$ est maximum quand $x = 1$ et en ce point $f_{max} \approx 14,8$.

**3. Déterminons à quel intervalle appartient l'intégrale:**

Ici: $I = \int_1^3 f(x)\,dx$.

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathcal{A} = I$ du domaine compris entre la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$, est telle que: $18 < \mathcal{A} < 26$ (plus de 23 carreaux et moins de 26 carreaux, en comptant).

Au total, nous retiendrons l'intervalle: [ 18 ; 26 ].

## Partie B:

**1. Déterminons $f'$ pour tout réel $x$ de l'intervalle [ 0 ; 7 ]:**

Ici: • $f(x) = 2x\, e^{-x+3}$ **(u x v)**

• $Df = [\, 0\, ;\, 7\, ]$

• $f$ est définie et dérivable sur l'intervalle [ 0 ; 7 ].

Comme $f$ est dérivable sur [ 0 ; 7 ], nous pouvons calculer $f'$:

Pour tout $x \in [\, 0\, ;\, 7\, ]$: $f'(x) = 2 \times e^{-x+3} + 2x \times (-e^{-x+3})$ **(u' x v + u x v')**

$\Rightarrow$ $f'(x) = e^{-x+3} \times (-2x + 2)$.

Au total, pour tout $x \in [\, 0\, ;\, 7\, ]$: $f'(x) = (-2x + 2) \times e^{-x+3}$.

**2. a. Étudions le signe de $f'$ sur [ 0 ; 7 ] et dressons le tableau de variation de $f$:**

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [\, 0\, ;\, 7\, ]$:

• **1er cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $(-2x + 2) \times e^{-x+3} = 0$

$\Leftrightarrow$ $-2x + 2 = 0^{*}$, cad: $x = 1$.

• **2ème cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $(-2x + 2) \times e^{-x+3} < 0$

$\Leftrightarrow$ $-2x + 2 < 0^{*}$, cad: $x > 1$ ou $x \in ]\, 1\, ;\, 7\, ]$.

• **3ème cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $(-2x + 2) \times e^{-x+3} > 0$

$\iff -2x + 2 > 0^{*}$, cad: $x < 1$ ou $x \in [0; 1[$.

( *: car pour tout $x \in [0; 7]$, $e^{-x+3} > 0$ )

Au total: • $f$ est croissante sur $[0; 1]$,

( car sur $[0; 1]$, $f'(x) \geqslant 0$ )

• $f$ est décroissante sur $[1; 7]$.

( car sur $[1; 7]$, $f'(x) \leqslant 0$ )

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

| $x$ | 0 | | 1 | | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | + | 0 | - | |
| $f$ | a | $\nearrow$ | b | $\searrow$ | c |

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = 0$,

• $b = f(1) \Rightarrow b = 2e^{2}$ ($\approx 14,78$),

• $c = f(7) \Rightarrow c = 14e^{-4}$ ($\approx 0,26$).

**2. b. Calculons le maximum de $f$ sur l'intervalle $[0; 7]$:**

Le maximum de $f$ sur $[0; 7]$ est atteint quand $f'(x) = 0$.

Or: $f'(x) = 0$ quand $x = 1$.

Ainsi: le point $A(1; 2e^{2})$ est le maximum de $f$ sur $[0; 7]$.

3. a. Justifions que l'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions $\alpha$ et $\beta$ sur l'intervalle $[0; 7]$:

Pour cela, nous allons dresser un nouveau tableau de variation:

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $1$ | | $\beta$ | | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | | | $0$ | | | $-$ | |
| $f$ | $a$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↗ | $b$ | ↘ | $f(\beta)$ | ↘ | $c$ |

Avec: • $a = 0$,

• $b \approx 14,78$,

• $c \approx 0,26$,

• $f(\alpha) = f(\beta) = 10$.

Le nouveau tableau de variation nous montre qu'il existe bien deux solutions $\alpha$ et $\beta$ telles que: $f(\alpha) = f(\beta) = 10$.

Au total $\alpha$ et $\beta$ existent bien avec: $\alpha \in [0; 1]$ et $\beta \in [1; 7]$.

3. b. Donnons une valeur approchée de $\beta$ sachant que $\alpha \approx 0,36$ à $10^{-2}$ près:

Par tâtonnement, nous trouvons: $\beta \approx 2,16$ à $10^{-2}$ près.

Au total, à $10^{-2}$ près: $\alpha \approx 0,36 \in [0; 1]$ et $\beta \approx 2,16 \in [1; 7]$.

4. a. Justifions que F est une primitive de $f$ sur $[0; 7]$:

Sur l'intervalle $[0; 7]$, F est une primitive de $f$ ssi: $F'(x) = f(x)$.

Ici: $F(x) = (-2x - 2)\, e^{-x+3}$ $(u \times v)$.

D'où: $F'(x) = -2 \times e^{-x+3} + (-2x - 2) \times (-e^{-x+3})$ $(u' \times v + u \times v')$

=> $F'(x) = 2x \times e^{-x+3}$.

Au total: F est bien une primitive de $f$ car $F'(x) = f(x)$.

**4. b. Calculons l'aire demandée:**

Ici, il s'agit de calculer: $\mathcal{A} = \int_1^3 f(x)\, dx$.

Nous avons: $\mathcal{A} = [\, F(x) \,]_1^3$

=> $\mathcal{A} = -8 + 4\, e^2$ u a ou $\mathcal{A} \approx 21{,}55$ u a

Au total, la valeur exacte de l'aire demandée est: $\mathcal{A} = -8 + 4\, e^2$ u a

**5. a. Calculons la valeur moyenne du bénéfice:**

Soit " m ", la valeur moyenne de $f$ sur [ 1 ; 3 ].

m est telle que: $m = \dfrac{1}{3-1} \displaystyle\int_1^3 f(x)\, dx$.

Or: $\displaystyle\int_1^3 f(x)\, dx = \mathcal{A}$.

D'où la valeur moyenne du bénéfice est: $\dfrac{1}{3-1} \times \mathcal{A} \times 1000$ €.

Au total, la valeur moyenne du bénéfice, à l'euro près est: m = 10 778 €.

**5. b. Déterminons le nombre d'objets que l'entreprise devra vendre:**

Pour atteindre l'objectif fixé, le nombre d'objets que doit vendre l'entreprise devra être compris entre $\alpha$ et $\beta$.

Ainsi, le nombre d'objets doit être compris entre: 36 et 216.