

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Fonctions, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. Déterminons, pour tout réel x de $[0; 10]$, f' :

Ici: • $f(x) = \frac{1}{0,5 + 100 e^{-x}}$ $\left(\frac{u}{v}\right)$

• $Df = [0; 10]$.

Posons: $f = \frac{f_1}{f_2 + f_3}$, avec: $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 0,5$

et: $f_3(x) = 100 e^{-x}$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur \mathbb{R} comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle $[0; 10]$.

f_3 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction "exponentielle", donc dérivable sur l'intervalle $[0; 10]$.

Par conséquent, $h = f_2 + f_3$ est dérivable sur $[0; 10]$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $[0; 10]$.

Enfin, f est dérivable sur $[0; 10]$ comme quotient $\left(\frac{f_1}{h}\right)$ de 2 fonctions dérivables sur $[0; 10]$, avec pour tout $x \in [0; 10]$, $h(x) \neq 0$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0; 10]$.

Pour tout $x \in [0; 10]$:

$$f'(x) = \frac{0 \times (0,5 + 100 e^{-x}) - 1 \times (-100 e^{-x})}{[0,5 + 100 e^{-x}]^2} \quad \left(\frac{u' \times v - u \times v'}{[v]^2} \right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{100 e^{-x}}{[0,5 + 100 e^{-x}]^2} > 0.$$

Au total, pour tout $x \in [0; 10]$: $f'(x) = \frac{100 e^{-x}}{[0,5 + 100 e^{-x}]^2} > 0.$

2. a. Montrons l'équivalence demandée:

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in [0; 10]: \quad 100 e^{-x} - 0,5 \geq 0 &\Leftrightarrow e^{-x} \geq \frac{0,5}{100} \\ &\Leftrightarrow -x \geq \ln\left(\frac{0,5}{100}\right) \\ &\Leftrightarrow x \leq -\ln\left(\frac{0,5}{100}\right) \\ &\Leftrightarrow x \leq -\ln(0,005). \end{aligned}$$

Au total, pour tout $x \in [0; 10]$, nous avons bien:

$$100 e^{-x} - 0,5 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\ln(0,005).$$

2. b. Déduisons-en le tableau de signes de f'' sur $[0; 10]$:

Ici: $f''(x) = \frac{100 e^{-x} \times (100 e^{-x} - 0,5)}{(0,5 + 100 e^{-x})^3}$

• $Df = [0; 10]$.

Or pour tout $x \in [0; 10]$: $100 e^{-x} > 0$ et $(0,5 + 100 e^{-x})^3 > 0$.

Le signe de f'' dépend donc du signe de: $100 e^{-x} - 0,5$.

Or: $100 e^{-x} - 0,5 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\ln(0,005) \Leftrightarrow x \leq \ln(200).$

D'où le tableau de signes de f'' sur $[0; 10]$ suivant:

x	0	$\ln(200)$	10
f''	+	0	-

3. Montrons que C_f admet un point d'inflexion noté I :

Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Or c'est le cas quand: $x = \ln(200)$.

Au total, l'abscisse du point d'inflexion est: $x = \ln(200)$.

D'où: $I(\ln(200); f(\ln(200)))$.

4. Déterminons l'intervalle sur lequel f est concave:

Soit $[e; f]$, l'intervalle recherché.

f est concave sur $[e; f]$ ssi: pour tout $x \in [e; f]$, $f''(x) \leq 0$.

Or le signe de f'' dépend du signe de: $100 e^{-x} - 0,5$.

Et: $100 e^{-x} - 0,5 \leq 0$ ssi $x \in [\ln(200); 10]$.

Au total: f est concave sur $[e; f] = [\ln(200); 10]$.

Partie B:

1. a. Calculons $f(10)$ en arrondissant au centième:

$$f(10) = \frac{1}{0,5 + 100 e^{-10}} \Rightarrow f(10) \approx 1,98^\circ\text{C}.$$

Au total: $f(10) \approx 1,98 \text{ }^\circ\text{C}$.

1. b. Déduisons-en qu'en 2150, l'objectif de l'accord de Paris sera respecté:

Nous avons: $f(10) \approx 1,98 \text{ }^\circ\text{C} < 2 \text{ }^\circ\text{C}$.

Or: $10 = 10 \times 25 \text{ ans}$, cad: 250 ans.

Et: $250 \text{ ans} + 1900 = 2150$.

Ainsi: en 2150, l'objectif de l'accord de Paris sera respecté car en 2150 la température aura augmenté de $1,98 \text{ }^\circ\text{C}$, ne dépassant pas de plus de $2 \text{ }^\circ\text{C}$ celle de 1900.

2. a. Déterminons l'année correspondante au point d'inflexion I:

Cela revient à calculer: $x_1 = \ln(200)$.

$\ln(200) \approx 5,30 \Rightarrow x_1 \approx 5,30$.

Or: $5,30 \times 25 \text{ ans} \approx 132,50 \text{ ans}$.

Et: $132,50 \text{ ans} + 1900 \approx 2032$.

Ainsi, l'année correspondante au point I est: 2032.

2. b. Calculons le nombre de degrés Celsius supplémentaire en 2032 par rapport à 1900:

Cela revient à calculer: $f(x_1)$, cad: $f(\ln(200))$.

$$f(\ln(200)) = \frac{1}{0,5 + 100 \times \frac{1}{200}} \Rightarrow f(\ln(200)) = 1 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Ainsi: en 2032, il y aura $1 \text{ }^\circ\text{C}$ supplémentaire par rapport à 1900.

3. a. Est-il vrai de dire qu'après 2033, la température climatique diminuera ?

Notons que 2033 se situe juste après le point d'inflexion I .

Or, nous savons que sur $[0; 10]$ donc sur $[x_1; 10]$, la fonction f est strictement croissante car sur cet intervalle $f' > 0$ (d'après 1.)

Donc: il est faux de dire qu'après 2033 (x_1), la température climatique diminuera.

3. b. Est-il vrai de dire qu'après 2033, la vitesse du réchauffement climatique diminuera ?

Notons que 2033 se situe juste après le point d'inflexion I .

Or, sur $[x_1; 10]$, la fonction f est concave (d'après 4.)

Donc: il est vrai de dire qu'après 2033 (x_1), la vitesse du réchauffement climatique diminuera.

4. Déterminons l'année au cours de laquelle la température terrestre atteindra le seuil de $+1,5$ °C:

Il s'agit ici de déterminer la valeur de " x " telle que: $f(x) = 1,5$.

$$f(x) = 1,5 \Leftrightarrow \frac{1}{0,5 + 100 e^{-x}} = 1,5$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} + 150 e^{-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 + 600 e^{-x} = 4$$

$$\Leftrightarrow 600 e^{-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^x = 600$$

$$\Rightarrow x = \ln(600) \text{ ou } x \approx 6,40.$$

Or: $6,40 \times 25 \text{ ans} = 160 \text{ ans}$.

Et: $160 \text{ ans} + 1900 = 2060$.

Ainsi, l'année au cours de laquelle la température terrestre atteindra le seuil de $+1,5^\circ\text{C}$ est: 2060.