

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Fonctions, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. a. Déterminons f' pour tout réel x de l'intervalle $[-20; 20]$:

Ici: • $f(x) = (-2x + 30) e^{0,2x-3}$ ($u \times v$)

• $Df = [-20; 20]$.

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(x) = -2x + 30$ et $f_2(x) = e^{0,2x-3}$.

f_1 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[-20; 20]$.

f_2 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction exponentielle, donc dérivable sur l'intervalle $[-20; 20]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[-20; 20]$ comme produit ($f_1 \times f_2$) de 2 fonctions dérivables sur $[-20; 20]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-20; 20]$.

Pour tout $x \in [-20; 20]$:

$$f'(x) = (-2) \times e^{0,2x-3} + (-2x + 30) \times (0,2) \times e^{0,2x-3} \quad (u' \times v + u \times v')$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = e^{0,2x-3} \times (-2 - 0,4x + 6)$$

$$\Rightarrow f'(x) = (-0,4x + 4) e^{0,2x-3}.$$

Au total, pour tout $x \in [-20; 20]$: $f'(x) = (-0,4x + 4) e^{0,2x-3}$.

1. b. Dressons le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-20; 20]$ et précisons la valeur exacte du maximum de f :

Étape 1: $f'(x) = (-0,4x + 4) e^{0,2x-3}$, sur $[-20; 20]$.

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout x de $[-20; 20]$, sachant que:

$$e^{0,2x-3} > 0.$$

• 1^{er} cas: $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } (-0,4x + 4) e^{0,2x-3} = 0$$

$$\Leftrightarrow -0,4x + 4 = 0, \text{ cad: } x = 10.$$

• 2^{ème} cas: $f'(x) < 0$.

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } (-0,4x + 4) e^{0,2x-3} < 0$$

$$\Leftrightarrow -0,4x + 4 < 0, \text{ cad: } x > 10 \text{ ou } x \in]10; 20].$$

• 3^{ème} cas: $f'(x) > 0$.

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } (-0,4x + 4) e^{0,2x-3} > 0$$

$$\Leftrightarrow -0,4x + 4 > 0, \text{ cad: } x < 10 \text{ ou } x \in [-20; 10[.$$

Au total: • f est croissante sur $[-20; 10]$,

(car sur $[-20; 10]$, $f'(x) \geq 0$)

• f est décroissante sur $[10; 20]$.

(car sur $[10; 20]$, $f'(x) \leq 0$)

Étape 2: Le tableau de variation.

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	-20	10	20
f'	+	0	-
f			

- Avec:
- $a = f(-20) \Rightarrow a = 70 e^{-7}$,
 - $b = f(10) \Rightarrow b = 10 e^{-1}$,
 - $c = f(20) \Rightarrow c = -10 e$.

Étape 3: Valeur exacte du maximum de f .

Soit $E(x_E; y_E)$, le maximum de f sur $[-20; 20]$.

x_E est tel que: $f'(x_E) = 0$.

$f'(x_E) = 0 \Rightarrow x_E = 10$ et donc $y_E = 10 e^{-1}$.

Au total: le point $E(10; 10 e^{-1})$ est le maximum de f sur $[-20; 20]$.

2. a. Montrons que, sur $[-20; 20]$, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α :

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement "croissante" ou "décroissante" sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une **unique** solution appartenant à $[a; b]$.

Ici: • f est continue sur $[-20; 20]$, donc sur $]10; 20]$.

- " $k = -2$ " est compris entre: $f(20) = -10e$

$$\text{et: } f(10) = 10e^{-1}.$$

- f est strictement décroissante sur $]10; 20]$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = -2$ ($k = -2$) admet une **unique** solution α appartenant à $]10; 20]$, et plus généralement à $[-20; 20]$.

Au total: $f(x) = -2$ admet exactement une solution α sur $[-20; 20]$.

2. b. Donnons un encadrement de α d'amplitude 0, 1:

Par tâtonnement, nous trouvons: $15,8 < \alpha < 15,9$.

Au total, un encadrement de α d'amplitude 0, 1 est:

$$15,8 < \alpha < 15,9.$$

3. a. Calculons la valeur exacte de $\int_{10}^{15} f(x) dx$:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_{10}^{15} f(x) dx$,

cad: $I = [F(x)]_{10}^{15}$.

$$I = [F(x)]_{10}^{15}$$

$$= [(-10x + 200) e^{0,2x-3}]_{10}^{15} \quad (\text{logiciel})$$

$$\Rightarrow I = 50 - 100 e^{-1}.$$

Au total: $I = \int_{10}^{15} f(x) dx = 50 - 100 e^{-1}$.

3. b. Déterminons le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et précisons l'abscisse du point d'inflexion:

- Soit $[e; f]$, l'intervalle recherché.

Ici: $f''(x) = (-0,08x + 0,4) e^{0,2x-3}$. (logiciel)

f est convexe sur $[e; f]$ ssi: pour tout $x \in [e; f]$, $f''(x) \geq 0$.

Or le signe de f'' dépend du signe de: $-0,08x + 0,4$ (car $e^{0,2x-3} > 0$).

Dans ces conditions: $f''(x) \geq 0$ ssi $-0,08x + 0,4 \geq 0$,

cad: $x \leq 5$ ou $x \in [-20; 5]$.

Au total: f est convexe sur $[e; f] = [-20; 5]$.

- Point d'inflexion ?

Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Or c'est le cas quand: $x = 5$.

Au total, l'abscisse du point d'inflexion est: $x = 5$.

Partie B:

1. Calculons le dénivelé de cette nouvelle piste:

Le dénivelé de cette nouvelle piste est: $f(x_B) - f(x_A)$.

Or: $x_B = 10$ et $x_A = 0$.

$$\begin{aligned} \text{D'où: } f(x_B) - f(x_A) &= f(10) - f(0) \\ &= 10 e^{-1} - 30 e^{-3} \\ &\approx 2,185 \text{ km.} \end{aligned}$$

Au total, le dénivelé de cette nouvelle piste, arrondi au mètre, est: 2 185 m.

2. Déterminons le niveau de difficulté de cette nouvelle piste:

Pour répondre à cette question, nous devons calculer la pente au maximum de la courbe, pour $x \in [0; 10]$.

Or, le maximum est atteint au point: $x = 5$ (d'après 3. b.).

Dans ces conditions, la pente de f quand $x = 5$ est:

$$f'(5) = 2 e^{-2} \Rightarrow f'(5) \approx 27\%$$

Au total, le niveau de difficulté de cette nouvelle piste est: rouge.