

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Spé Maths

## Terminale

Fonctions, Synthèse



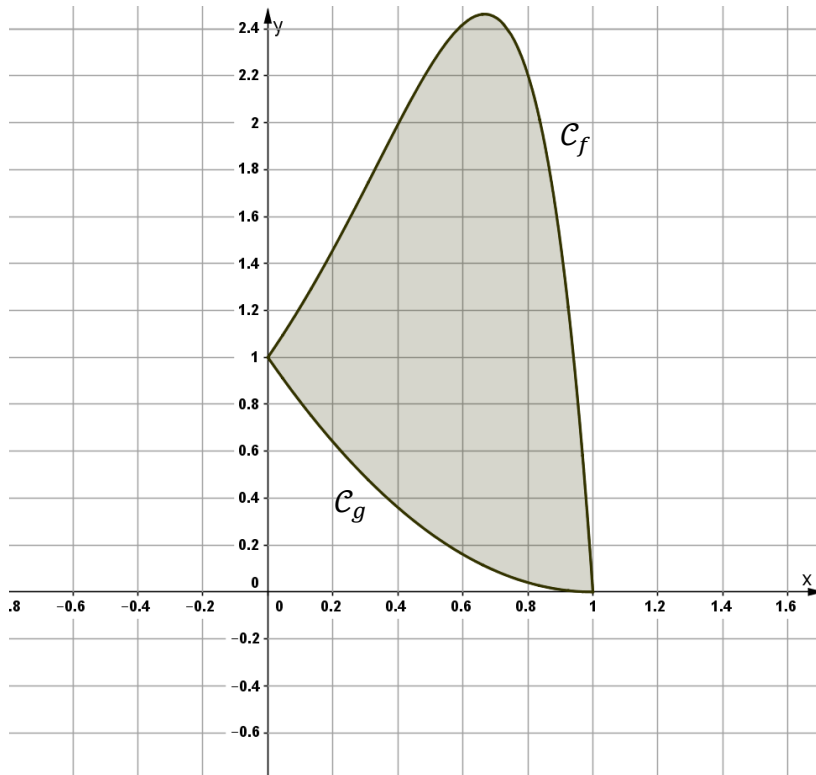
**ÉNONCÉ** DE L'EXERCICE

# FONCTION

Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.

Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions  $f$  et  $g$  définies par : pour tout réel  $x$  de  $[0 ; 1]$ ,  $f(x) = (1 - x)e^{3x}$  et  $g(x) = x^2 - 2x + 1$ .

Leurs courbes représentatives seront notées respectivement  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .



## Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants.

```
dériver((1-x)*exp(3x))  
: -3x*exp(3*x)+2*exp(3*x)
```

```
factoriser(-3x*exp(3*x)+2*exp(3*x))  
: exp(3x)*(-3x+2)
```

```
factoriser(dériver(exp(3x)*(-3x+2)))  
: 3*exp(3*x)(1-3x)
```

*Lecture : la dérivée de la fonction  $f$  est donnée par  $f'(x) = -3xe^{3x} + 2e^{3x}$ , ce qui, après factorisation, donne  $f'(x) = (-3x + 2)e^{3x}$ .*

1. Étudier sur  $[0 ; 1]$  le signe de la fonction dérivée  $f'$ , puis donner le tableau de variation de  $f$  sur  $[0 ; 1]$  en précisant les valeurs utiles.
2. La courbe  $\mathcal{C}_f$  possède un point d'inflexion. Déterminer ses coordonnées.

## Partie B

On se propose de calculer l'aire de la partie grisée sur le graphique.

1. Vérifier que les points A et B de coordonnées respectives  $(1 ; 0)$  et  $(0 ; 1)$  sont des points communs aux courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .
2. On admet que : pour tout  $x$  dans  $[0 ; 1]$ ,  $f(x) - g(x) = (1 - x)(e^{3x} - 1 + x)$ .
  - a. Justifier que pour tout  $x$  dans  $[0 ; 1]$ ,  $e^{3x} - 1 \geq 0$ .
  - b. En déduire que pour tout  $x$  dans  $[0 ; 1]$ ,  $e^{3x} - 1 + x \geq 0$ .
  - c. Étudier le signe de  $f(x) - g(x)$  pour tout  $x$  dans  $[0 ; 1]$ .
3. a. Calculer  $\int_0^1 g(x) dx$ .

b. On admet que :

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{e^3 - 4}{9}.$$

Calculer l'aire  $S$ , en unité d'aire, de la partie grisée. Arrondir le résultat au dixième.