Spé Maths
Terminale

Fonctions, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION, SYNTHÈSE 35

CORRECTION

Partie A:

1. a. Etudions le signe de f' sur $[0; 1]$:

Ici: • $f(x) = (1 - x)\,e^{3x}$

• $Df = [0; 1]$

• $f'(x) = (-3x + 2)\,e^{3x}$.

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout x de $[0; 1]$:

• 1[er] cas: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $(-3x + 2)\,e^{3x} = 0$

$\Longleftrightarrow$ $-3x + 2 = 0^{*}$, cad: $x = \frac{2}{3}$.

• 2[ème] cas: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $(-3x + 2)\,e^{3x} < 0$

$\Longleftrightarrow$ $-3x + 2 < 0^{*}$, cad: $x > \frac{2}{3}$ ou $x \in \left]\frac{2}{3}; 1\right]$.

• 3[ème] cas: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $(-3x + 2)\,e^{3x} > 0$

$\Longleftrightarrow$ $-3x + 2 > 0^{*}$, cad: $x < \frac{2}{3}$ ou $x \in \left[0; \frac{2}{3}\right[$.

(*: car pour tout $x \in [\,0\,;\,1\,]$, $e^{3x} > 0$)

Au total: • f est croissante sur $\left[\,0\,;\,\frac{2}{3}\,\right]$,

(car sur $\left[\,0\,;\,\frac{2}{3}\,\right]$, $f'(x) \geqslant 0$)

• f est décroissante sur $\left[\,\frac{2}{3}\,;\,1\,\right]$.

(car sur $\left[\,\frac{2}{3}\,;\,1\,\right]$, $f'(x) \leqslant 0$)

1. b. Donnons le tableau de variation de f sur $[\,0\,;\,1\,]$, en précisant les valeurs utiles:

Comme nous l'avons déjà dit: • f est croissante sur $\left[\,0\,;\,\frac{2}{3}\,\right]$,

• f est décroissante sur $\left[\,\frac{2}{3}\,;\,1\,\right]$.

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	0		$\frac{2}{3}$		1
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = 1$,

• $b = f\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow b = \frac{1}{3}e^{2}$,

• $c = f(1) \Rightarrow c = 0$.

2. Déterminons les coordonnées du point d'inflexion:

> Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Nous savons que: $f''(x) = 3\,(1 - 3x)\,e^{3x}$.

Or, pour tout x de $[\,0\,;\,1\,]$: $e^{3x} > 0$.

D'où: $f''(x) = 0$ ssi $3\,(1 - 3x) = 0$, cad: $x = \frac{1}{3}$.

Au total, les coordonnées du point d'inflexion sont: $\left(\frac{1}{3}\,;f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ cad $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{2e}{3}\right)$.

Partie B:

1. Vérifions que les points A $(1\,;\,0)$ et B $(0\,;\,1)$ sont des points communs aux courbes Cf et Cg:

- Le point A $(1\,;\,0)$ est commun aux courbes Cf et Cg ssi:

$$\begin{cases} f(x_A) = y_A \\ g(x_A) = y_A \end{cases} \quad \text{cad} \quad \begin{cases} (1 - x_A)\,e^{3x_A} = 0 \\ x_A^{\,2} - 2x_A + 1 = 0 \end{cases} \quad (I).$$

Or: $(I) \iff \begin{cases} (1 - 1)\,e^{3 \times 1} = 0 \\ 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A = 0 \\ y_A = 0 \end{cases}.$

- Le point B $(0\,;\,1)$ est commun aux courbes Cf et Cg ssi:

$$\begin{cases} f(x_B) = y_B \\ g(x_B) = y_B \end{cases} \quad \text{cad} \quad \begin{cases} (1 - x_B)\,e^{3x_B} = 1 \\ x_B^{\,2} - 2x_B + 1 = 1 \end{cases} \quad (II).$$

Or: $(II) \iff \begin{cases} (1-0)\,e^{3\times 0} = 1 \\ 0^2 - 2\times 0 + 1 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} y_B = 1 \\ y_B = 1 \end{cases}$.

Au total: les points A et B sont communs aux courbes Cf et Cg.

2. a. Justifions que pour tout x dans $[\,0\,;\,1\,]$, $e^{3x} - 1 \geq 0$:

Pour tout $x \in [\,0\,;\,1\,]$, nous avons:

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \iff 0 \leqslant 3x \leqslant 3$$

$$\iff e^0 \leqslant e^{3x} \leqslant e^3$$

$$\iff 1 \leqslant e^{3x} \leqslant e^3$$

$$\iff 1 - 1 \leqslant e^{3x} - 1 \leqslant e^3 - 1$$

$$\implies 0 \leqslant e^{3x} - 1 \leqslant e^3 - 1 \text{ ou } e^{3x} - 1 \geqslant 0.$$

Au total, pour tout $x \in [\,0\,;\,1\,]$: $e^{3x} - 1 \geqslant 0$.

2. b. Déduisons-en que pour tout x dans $[\,0\,;\,1\,]$, $e^{3x} - 1 + x \geq 0$:

Pour tout $x \in [\,0\,;\,1\,]$, nous avons:

- $x \geqslant 0$ (1)
- $e^{3x} - 1 \geqslant 0$ (2)

En additionnant membre à membre les inégalités (1) et (2), nous obtenons:

$(1) + (2) \iff x + e^{3x} - 1 \geqslant 0 \implies e^{3x} - 1 + x \geqslant 0.$

Au total, pour tout $x \in [\,0\,;\,1\,]$: $e^{3x} - 1 + x \geqslant 0$.

2. c. Etudions le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout x dans $[0; 1]$:

$f(x) - g(x) = (1 - x)(e^{3x} - 1 + x)$.

Comme $e^{3x} - 1 + x \geqslant 0$, le signe de $f(x) - g(x)$ dépend du signe de " $1 - x$ ".

Or, pour tout $x \in [0; 1]$, $1 - x \geqslant 0$.

Dans ces conditions: pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) - g(x) \geqslant 0$.

Au total, le signe de $f(x) - g(x)$, pour tout x dans $[0; 1]$ est:

positif ou nul.

3. a. Calculons $I = \int_0^1 g(x)\,dx$:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\,dx$.

g est continue sur $[0; 1]$, elle admet donc des primitives sur $[0; 1]$ et par conséquent: I existe.

$$I = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{3}.$$

Au total: $I = \frac{1}{3}$.

3. b. Calculons l'aire S, en arrondissant au dixième:

Ici, il s'agit de calculer: $S = \int_0^1 (1 - x)(e^{3x} - 1 + x)\,dx$.

Les fonctions f et g sont continues sur $[\,0\,;\,1\,]$, et donc la fonction $f - g$ est continue sur $[\,0\,;\,1\,]$. $f - g$ admet donc des primitives sur $[\,0\,;\,1\,]$ et par conséquent: S existe.

$$S = \int_0^1 [\,f(x) - g(x)\,]\,dx$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx$$

$$= \frac{e^3 - 4}{9} - \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{e^3 - 7}{9}$$ cad $I \approx 1,5$ u. a., en arrondissant au dixième.

Au total: $S \approx 1,5$ u. a.