

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Spé Maths

## Terminale

Fonctions, Synthèse



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. Résolvons graphiquement et de façon approchée  $f(x) = 3000$ :

A l'aide du graphique:  $f(x) = 3000$  quand  $x = 6, 4$ .

(3 gros carrés et 2 petits carrés)

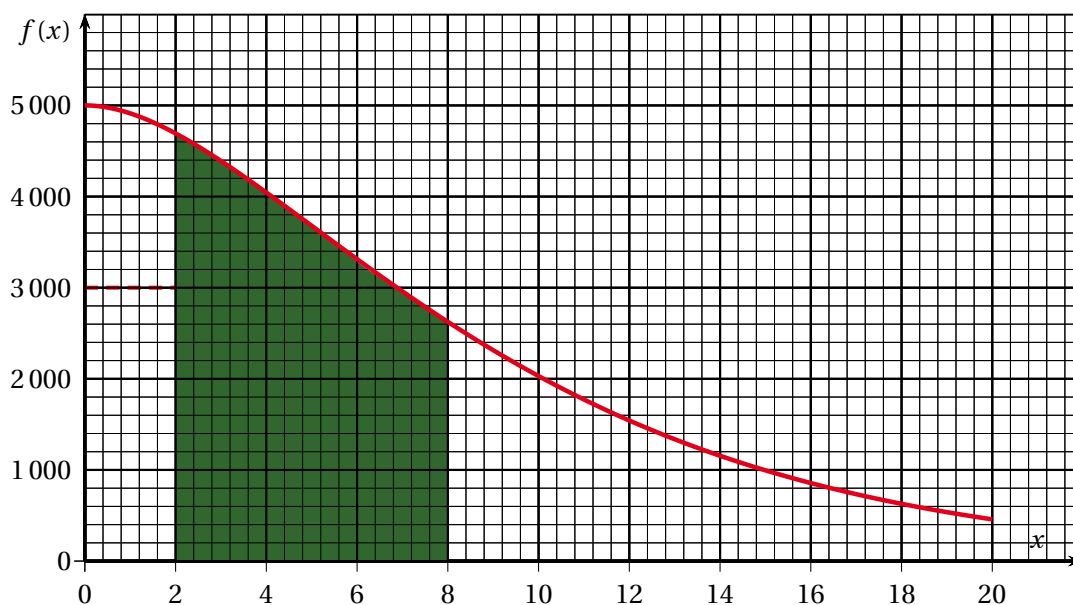
Graphiquement, l'équation  $f(x) = 3000$  admet pour solution:  $x = 6, 4$ .

2. Donnons graphiquement une valeur approchée de  $\int_2^8 f(x) dx$ :

$\int_2^8 f(x) dx$  correspond, en unités d'aire et à l'unité près, à l'aire du domaine compris entre la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 2$  et  $x = 8$ .

Soit  $\mathcal{D}$  le domaine correspondant à  $\int_2^8 f(x) dx$  sur le graphique.

Le domaine  $\mathcal{D}$  est représenté par la surface verte sur le graphique suivant:



En comptant le nombre de carreaux, on obtient:

- 9 gros carreaux de 25 petits carreaux
- + • 46 petits carreaux.

Soit un total de: **271 petits carreaux.**

Or, en unités d'aire, un petit carreau représente:  $\frac{2 \times 1000}{25} = 80.$

Dans ces conditions:  $271 \times 80 = 21680$  unités d'aire.

Au total, une valeur approchée de  $\int_2^8 f(x) dx$  est: 21680 unités d'aire.

## Partie B: Étude théorique

1. Démontrons que pour tout  $x$  de  $[0; 20]$ ,  $f'(x) = -200x e^{-0,2x}$ :

Ici: •  $f(x) = 1000(x + 5) e^{-0,2x}$  (u x v)

•  $Df = [0; 20]$ .

Posons:  $f = f_1 \times f_2$ , avec:  $f_1(x) = 1000(x + 5)$  et  $f_2(x) = e^{-0,2x}$ .

$f$  est dérivable sur  $[0; 20]$  car  $f_1$  et  $f_2$  sont dérivables sur  $[0; 20]$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in [0; 20]$ .

Pour tout  $x \in [0; 20]$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1000) \times (e^{-0,2x}) + (1000(x + 5)) \times (-0,2e^{-0,2x}) && (u' \times v + u \times v') \\ &= -200x e^{-0,2x}. \end{aligned}$$

Au total, pour tout  $x \in [0; 20]$ , nous avons bien:  $f'(x) = -200x e^{-0,2x}$ .

## 2. a. Déduisons-en le sens de variation de $f$ sur $[0; 20]$ :

Nous allons distinguer 2 cas pour tout  $x \in [0; 20]$ :

• 1<sup>er</sup> cas:  $f'(x) = 0$ .

$$f'(x) = 0 \text{ ssi } -200x e^{-0,2x} = 0, \text{ cad: } x = 0.$$

(pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-0,2x} > 0$ )

• 2<sup>ème</sup> cas:  $f'(x) < 0$ .

$$f'(x) < 0 \text{ ssi } -200x e^{-0,2x} < 0, \text{ cad: } x \in ]0; 20].$$

(pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-0,2x} > 0$ )

Au total: •  $f$  est décroissante sur  $[0; 20]$ .

(car sur  $[0; 20]$ ,  $f'(x) \leq 0$ )

## 2. b. Dressons le tableau des variations de $f$ sur $[0; 20]$ :

Le tableau des variations de  $f$  sur  $[0; 20]$  est le suivant:

$x$	0	20
$f'$	0	-
$f$	$a$	$b$

Avec: •  $a = f(0) \Rightarrow a = 5000$ ,

•  $b = f(20) \Rightarrow b = 25000 e^{-4}$ .

3. a. Montrons que sur  $[0; 20]$ , l'équation  $f(x) = 3000$  admet une solution unique:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

• Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ .

Pour tout réel " $K$ " compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel " $c$ " de  $[a; b]$  tel que:  $f(c) = K$ .

Cela signifie que: l'équation  $f(x) = K$  admet au moins une solution appartenant à  $[a; b]$ .

• Si de plus, la fonction  $f$  est strictement "croissante" ou "décroissante" sur  $[a; b]$ , l'équation  $f(x) = K$  admet une **unique** solution appartenant à  $[a; b]$ .

Ici: •  $f$  est continue sur  $[0; 20]$ , donc sur  $]0; 20[$ .

• " $k = 3000$ " est compris entre:  $f(20) = 25000 e^{-4}$

et:  $f(0) = 5000$ .

•  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; 20[$ .

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation  $f(x) = 3000$  ( $k = 3000$ ) admet une **unique** solution  $\alpha$  appartenant à  $]0; 20]$ .

**Au total:**  $f(x) = 3000$  admet exactement une solution unique  $\alpha$  sur  $]0; 20]$ .

3. b. Donnons une valeur approchée de  $\alpha$  à l'aide de la calculatrice:

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons comme valeur approchée de  $\alpha$ :

$$\alpha \approx 6,88 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

**Au total:**  $\alpha \approx 6,88$  à  $10^{-2}$  près, avec:  $\alpha \in ]0; 20]$ .

4. Calculons  $\int_2^8 f(x) dx$ :

Ici, il s'agit de calculer:  $I = \int_2^8 f(x) dx$ .

$f$  est continue sur  $[2; 8]$ , elle admet donc des primitives sur  $[2; 8]$  et par conséquent:  $I$  existe.

$$I = \int_2^8 f(x) dx$$

$$= [F(x)]_2^8$$

$$= [-5000 \times (x + 10) e^{-0,2x}]_2^8$$

$$= (-5000 (18) \times e^{-1,6}) - (-5000 \times (12) \times e^{-0,4})$$

$$= -90000 e^{-1,6} + 60000 e^{-0,4}.$$

**Au total:** • Une valeur exacte de  $I$  est:  $I = -90000 e^{-1,6} + 60000 e^{-0,4}$ ,

- Une valeur arrondie à l'unité de  $I$  est:  $I \approx 22048$ .

## Partie C: Application économique

1. Déterminons en dessous de quel prix unitaire, la demande est supérieure à 3000 objets:

- D'après l'énoncé:
- $f(x)$  représente la quantité d'objets demandés,
  - $x$  correspond au prix unitaire d'un objet, en euros.

Dans ces conditions, la demande est supérieure à 3000 objets quand:

$$f(x) \geq 3000.$$

Or, d'après la question Partie B, 3. b.,  $f(x) \geq 3000$  dès que:  $x \leq 6,88$ .

( la fonction  $f$  est décroissante )

**Au total:** la demande est supérieure à 3000 objets dès que le prix unitaire passe en dessous de **6,88 euros**.

2. Déterminons la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur  $[2; 8]$  et interprétons:

Soit " $m$ ", la valeur moyenne de  $f$  sur  $[2; 8]$ .

$$m \text{ est telle que: } m = \frac{1}{8-2} \int_2^8 f(x) dx.$$

Or:  $\int_2^8 f(x) dx \approx 22048$ , d'après la question Partie B, 4.

Ainsi, la valeur moyenne de  $f$  sur  $[2; 8]$  est:  $\frac{22048}{8-2} \approx 3675$ .

**Cela signifie que:** pour un prix unitaire compris entre 2 et 8 euros, la quantité demandée sera en moyenne de 3675 objets.