Spé Maths
Terminale

Fonctions, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION, SYNTHÈSE 31

CORRECTION

Partie A:

1. Donnons l'encadrement demandé:

A l'aide du **premier** graphique, à savoir celui de la courbe représentative de f, la fonction f semble atteindre son maximum (M) quand: $1 < x < 2$.

Au total, l'encadrement demandé est: $1 < x < 2$.

2. a. Donnons un intervalle défini par deux entiers sur lequel f semble convexe:

Soit $[\, e\,;f\,]$, l'intervalle recherché.

f est convexe sur $[\, e\,;f\,]$ ssi: pour tout $x \in [\, e\,;f\,]$, $f''(x) \geqslant 0$.

A l'aide du troisième graphique, à savoir celui de la courbe représentative de f'', la fonction f semble convexe sur: $[\,2\,;5\,]$.

Au total, l'intervalle sur lequel f semble convexe est: $[\,2\,;5\,]$.

2. b. b1. Expliquons pourquoi on peut conjecturer que la courbe Cf admet un point d'inflexion:

Nous pouvons conjecturer le fait que la courbe Cf admet un point d'inflexion car: la dérivée seconde s'annule et change de signe.

En effet, ici, à l'aide du troisième graphique: la dérivée seconde semble s'annuler et changer de signe quand $x \in \,]\,2\,;3\,[$.

2. b. b2. Donnons un encadrement par deux entiers consécutifs de l'abscisse de ce point d'inflexion:

Soit x_I, l'abscisse du point d'inflexion, x_I est tel que: $2 < x_I < 3$.

3. Déterminons l'équation de la tangente à la courbe Cf au point d'abscisse 0:

L'équation de la tangente à la courbe Cf au point d'abscisse $x = 0$ est:

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

Par lecture du premier et second graphiques: $f'(0) = 2$ et $f(0) = 0$.

Dans ces conditions, l'équation de la tangente à la courbe Cf au point d'abscisse $x = 0$ est: $y = 2x$.

4. Comment interpréter graphiquement ce nombre I ?

Ce nombre I s'interprète comme suit: I correspond, en unités d'aire et à l'unité prés, à l'aire du domaine compris entre la courbe (Cf'), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Notons que: $0 < I < 1$.

Partie B:

1. a. Montrons que pour tout $x \in [0; 5]$, $f'(x) = (-x^2 + 2)e^{-x}$:

Ici: • $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ **(u x v)**

• $Df = [0; 5]$.

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(x) = x^2 + 2x$ et $f_2(x) = e^{-x}$.

f est dérivable sur $[0; 5]$ car f_1 et f_2 sont dérivables sur $[0; 5]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0\,;5\,]$.

Pour tout $x \in [\,0\,;5\,]$:

$f'(x) = (2x + 2) \times (e^{-x}) + (x^2 + 2x) \times (-e^{-x})$ **($u' \times v + u \times v'$)**

$= 2x\, e^{-x} + 2e^{-x} + (-x^2\, e^{-x} - 2x\, e^{-x})$

$= 2\, e^{-x} - x^2\, e^{-x}$ **ou**: $(-x^2 + 2)\, e^{-x}$.

Au total, pour tout $x \in [\,0\,;5\,]$, nous avons bien: $f'(x) = (-x^2 + 2)\, e^{-x}$.

I. b. bI. Déterminons les variations de f sur $[\,0\,;5\,]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [\,0\,;5\,]$:

- **1er cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $(-x^2 + 2)\, e^{-x} = 0$, cad: $x = \sqrt{2} \in [\,0\,;5\,]$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$)

- **2ème cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $(-x^2 + 2)\, e^{-x} < 0$, cad: $x \in \,]\sqrt{2}\,;5\,]$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$)

- **3ème cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $(-x^2 + 2)\, e^{-x} > 0$, cad: $x \in [\,0\,;\sqrt{2}\,[$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$)

Au total: • f est croissante sur $[\,0\,;\sqrt{2}\,]$,

(car sur $[\,0\,;\sqrt{2}\,]$, $f'(x) \geqslant 0$)

- f est décroissante sur $[\sqrt{2}\,;5]$.

(car sur $[\sqrt{2}\,;5]$, $f'(x) \leqslant 0$)

Nous pouvons alors dresser le tableau de variation suivant:

x	0		$\sqrt{2}$		5
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = 0$,

• $b = f(\sqrt{2}) \Rightarrow b = (2 + 2\sqrt{2})\,e^{-\sqrt{2}}$,

• $c = f(5) \Rightarrow c = 35e^{-5}$.

1. b. b2. Précisons l'abscisse du maximum de f:

D'après le tableau de variation précédent, nous pouvons dire que:

l'abscisse du maximum de f est $\boldsymbol{x_M = \sqrt{2}}$.

Ainsi le maximum de f a pour coordonnées: $(\sqrt{2}\,;(2 + 2\sqrt{2})\,e^{-\sqrt{2}})$.

1. c. Donnons la valeur arrondie au millième du maximum de f:

Les valeurs arrondies au millième des coordonnées du maximum de f sont:

$$x_M \approx 1,414 \quad \text{et} \quad y_M \approx 1,174.$$

2. Ces deux valeurs sont-elles égales ?

- $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,dx = [f(x)]_0^1$

$= f(1) - f(0)$

$= f(1)$, car: $f(0) = 0$.

• $f(1) = f(1)$, par définition.

Donc: oui ces deux valeurs sont égales.