

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Fonctions, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. Déterminons graphiquement la durée de travail quotidien menant à saturation:

D'après l'énoncé, quand la fonction satisfaction atteint la valeur 100, on dit qu'il y a saturation.

Or ici: $f(x) = 100$ quand: $x = 3$ heures.

Ainsi: la durée de travail quotidien menant à saturation est de 3 heures.

2. Déterminons graphiquement à partir de quelle durée de travail il y a rejet:

D'après l'énoncé, il y a rejet lorsque la fonction envie est strictement négative.

En d'autres termes, il y a rejet à partir du moment où: $f'(x) < 0$.

Or ici: $f'(x) < 0$ à partir de: 3 heures de travail.

Ainsi: à partir de 3 heures de travail quotidien, il y a rejet.

Partie B:

1. Montrons que pour tout $x \in [0; 30]$, $g'(x) = (12,5 - 1,5625x) e^{-0,125x + 1}$:

Ici: • $g(x) = 12,5x e^{-0,125x+1}$ (u x v)

• $Dg = [0; 30]$.

Posons: $g = g_1 \times g_2$, avec: $g_1(x) = 12,5x$ et $g_2(x) = e^{-0,125x+1}$.

g est dérivable sur $[0; 30]$ car g_1 et g_2 sont dérivables sur $[0; 30]$.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in [0; 30]$.

Pour tout $x \in [0; 30]$:

$$g'(x) = (12,5) \times (e^{-0,125x+1}) + (12,5x) \times (-0,125e^{-0,125x+1}) \quad (u' \times v + u \times v')$$

$$= (12,5 - 1,5625x) e^{-0,125x+1}.$$

Au total, nous avons bien, pour tout $x \in [0; 30]$:

$$g'(x) = (12,5 - 1,5625x) e^{-0,125x+1}.$$

2. a. Etudions le signe de g' sur $[0; 30]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [0; 30]$.

• 1^{er} cas: $g'(x) = 0$.

$$g'(x) = 0 \text{ ssi } 12,5 - 1,5625x = 0, \text{ cad: } x = 8.$$

• 2^{ème} cas: $g'(x) < 0$.

$$g'(x) < 0 \text{ ssi } 12,5 - 1,5625x < 0, \text{ cad: } x \in]8; 30].$$

$$(\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, e^{-0,125x+1} > 0)$$

• 3^{ème} cas: $g'(x) > 0$.

$$g'(x) > 0 \text{ ssi } 12,5 - 1,5625x > 0, \text{ cad: } x \in [0; 8[.$$

(pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,125x+1} > 0$)

- Au total:**
- g est croissante sur $[0; 8]$,
(car sur $[0; 8]$, $g'(x) \geq 0$)
 - g est décroissante sur $[8; 30]$.
(car sur $[8; 30]$, $g'(x) \leq 0$)

2. b. Dressons le tableau de variation de g sur $[0; 30]$:

Sur $[0; 30]$, le tableau de variation de g est le suivant:

x	0	8	30
g'	+	0	-
g	a	b	c

Diagramme du tableau de variation : une flèche pointe de a vers b et une autre pointe de b vers c .

- Avec:
- $a = g(0) \Rightarrow a = 0$,
 - $b = g(8) \Rightarrow b = 100$,
 - $c = g(30) \Rightarrow c = 375 e^{-2,75} \approx 24$.

3. Déterminons la durée de séjour qui correspond à l'effet saturation:

D'après l'énoncé, quand la fonction satisfaction atteint la valeur 100, on dit qu'il y a saturation.

Or ici: $g(x) = 100$ quand: $x = 8$ jours. ($g(8) = 100$)

Ainsi: une durée de séjour de 8 jours mène à saturation.

Partie C:

1. Donnons sans justification une expression de $h''(x)$:

D'après le logiciel de calcul: $h''(x) = \frac{5,625 e^{-0,25x+6} (e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3}$.

Au total, pour tout $x \in [10; 50]$: $h''(x) = \frac{5,625 e^{-0,25x+6} (e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3}$.

2. Résolvons dans l'intervalle $[10; 50]$, $e^{-0,25x+6} - 1 > 0$:

$$e^{-0,25x+6} - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(e^{-0,25x+6}) > \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow -0,25x + 6 > 0$$

$$\Leftrightarrow 0,25x < 6$$

$$\Leftrightarrow x < 24 \text{ cad: } x \in [10; 24[.$$

Au total, l'inéquation admet comme solution: $x \in [10; 24[$.

3. Etudions la convexité de la fonction h sur l'intervalle $[10; 50]$:

Ici: • $h(x) = \frac{90}{1 + e^{-0,25x+6}}$

• $Dh = [10; 50]$

• $h''(x) = \frac{5,625 e^{-0,25x+6} (e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3}$

Or: • h est convexe ssi: $h''(x) \geq 0$,

• h est concave ssi: $h''(x) \leq 0$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [10; 50]$, sachant que: $e^{-0,25x+6} > 0$.

• 1^{er} cas: $h''(x) \geq 0$.

$$h''(x) \geq 0 \text{ ssi } \frac{5,625 e^{-0,25x+6} (e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,25x+6} - 1 \geq 0, \text{ cad: } x \in [10; 24]. \quad (\text{d'après question 2.})$$

• 2^{ème} cas: $h''(x) \leq 0$.

$$h''(x) \leq 0 \text{ ssi } e^{-0,25x+6} - 1 \leq 0, \text{ cad: } x \in [24; 50].$$

Au total: • h est convexe sur $[10; 24]$,

• h est concave sur $[24; 50]$.

4. Déterminons le salaire annuel à partir duquel la fonction envie décroît:

D'après l'énoncé, la fonction **envie** correspond à la dérivée de la fonction satisfaction.

D'où ici, la fonction **envie** correspond à h' .

Or h' décroît dès lors que: $h''(x) \leq 0$

cad quand: $x \geq 24000$ euros.

Ainsi, la fonction envie décroît dès que: le salaire annuel dépasse 24000 euros.

5. Déterminons le salaire annuel pour lequel la satisfaction atteint 80:

La fonction satisfaction correspond ici à: $h(x) = \frac{90}{1 + e^{-0,25x+6}}$, avec $x \in [10; 50]$.

Dans ces conditions: $h(x) = 80$ quand $\frac{90}{1 + e^{-0,25x+6}} = 80$.

$$\frac{90}{1 + e^{-0,25x+6}} = 80 \Leftrightarrow 90 = 80 (1 + e^{-0,25x+6})$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,25x+6} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{-0,25x+6}) = -\ln(8)$$

$$\Leftrightarrow -0,25x+6 = -\ln(8)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(8) + 6}{0,25} \text{ ou: } x = 4 \ln(8) + 24.$$

Au total, le salaire annuel pour lequel la satisfaction atteint 80 est de:

$$4 \ln(8) + 24 \approx 32\,000 \text{ euros.}$$