Spé Maths
Terminale

Fonctions, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION, SYNTHÈSE 3

CORRECTION

1. a. Démontrons que pour tout x de $[\ 1\ ;\ 25\ ]$, $f'(x) = \dfrac{-3 + \ln(x)}{x^2}$.

Ici: • $f(x) = \dfrac{x + 2 - \ln(x)}{x}$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)$

• $Df = [\ 1\ ;\ 25\ ]$.

Posons: $f = \dfrac{f_1 - f_2}{f_3}$, avec: $f_1(x) = x + 2$, $f_2(x) = \ln(x)$ et $f_3(x) = x$.

f est dérivable sur $[\ 1\ ;\ 25\ ]$ car f_1, f_2 et f_3 sont dérivables sur $[\ 1\ ;\ 25\ ]$.

(Et: pour tout $x \in [\ 1\ ;\ 25\ ]$, $f_3(x) \neq 0$)

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\ 1\ ;\ 25\ ]$.

Pour tout $x \in [\ 1\ ;\ 25\ ]$:

$$f'(x) = \frac{\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \times (x) - (x + 2 - \ln(x)) \times (1)}{x^2} \qquad \left(\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}\right)$$

$$= \frac{(x - 1) - (x + 2 - \ln(x))}{x^2}$$

$$= \frac{-3 + \ln(x)}{x^2}.$$

Au total, pour tout $x \in [\ 1\ ;\ 25\ ]$, nous avons bien: $f'(x) = \dfrac{-3 + \ln(x)}{x^2}$.

1. b. Résolvons dans [1; 25], l'inéquation $-3 + \ln(x) > 0$:

Pour tout $x \in [\,1; 25\,]$: $-3 + \ln(x) > 0 \iff \ln(x) > 3$

$\iff e(\ln(x)) > e^3$

$\iff x > e^3$.

Au total, l'inéquation admet comme solution: $x \in \,]\,e^3; 25\,]$.

1. c. Dressons le tableau des variations de f sur [1; 25]:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [\,1; 25\,]$:

• **1er cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $-3 + \ln(x) = 0$, cad: $x = e^3$ (question précédente).

• **2ème cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $-3 + \ln(x) < 0$, cad: $x \in [\,1; e^3\,[$.

• **3ème cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $-3 + \ln(x) > 0$, cad: $x \in \,]\,e^3; 25\,]$.

Au total: • f est décroissante sur $[\,1; e^3]$,

(car sur $[\,1; e^3]$, $f'(x) \leqslant 0$)

• f est croissante sur $[\,e^3; 25\,]$.

(car sur $[\,e^3; 25\,]$, $f'(x) \geqslant 0$)

Nous pouvons alors dresser le tableau des variations suivant:

x	1		e^3		25
f'		$-$	0	$+$	
f	a	$\searrow$	b	$\nearrow$	c

Avec: • $a = f(1) \Rightarrow a = 3$,

• $b = f(e^3) \Rightarrow b = 1 - \dfrac{1}{e^3}$,

• $c = f(25) \Rightarrow c = \dfrac{27 - \ln(25)}{25}$.

1. d. Montrons que sur [1; 25], l'équation $f(x) = 1,5$ admet une seule solution:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

> • Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.
>
> Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.
>
> Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.
>
> • Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a; b]$.

Ici: • f est continue sur $[\ 1 ; 25\ ]$, donc sur $[\ 1 ; e^3\ [$, car: $1,5 \in [\ f(e^3) ; f(1)\ [$.

• " $k = 1,5$ " est compris entre: $f(e^3) = 1 - \dfrac{1}{e^3}$

et: $f(1) = 3$.

• f est strictement décroissante sur $[\ 1 ; e^3\ [$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 1,5$ ($k = 1,5$) admet une unique solution α appartenant à $[\ 1 ; e^3\ [$, et plus généralement à $[\ 1 ; 25\ ]$.

Au total: $f(x) = 1,5$ admet exactement une solution unique α sur $[\ 1 ; 25\ ]$.

1. e. Déterminons un encadrement d'amplitude 0, 01 de α:

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons comme valeur approchée de α:

$$\alpha \in \ ]\ 2,31 ; 2,32\ [\text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Au total: $\alpha \in \ ]\ 2,31 ; 2,32\ [$ à 10^{-2} près.

2. a. a1. Déterminons le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal:

D'après l'énoncé: • la fonction f représente le coût moyen de fabrication d'une pièce électronique (en euros),

• x correspond au nombre de pièces électroniques (en centaines).

Le coût moyen de fabrication (CM) est minimal quand la fonction f est minimale.

Or, la fonction f est minimale quand: $x = e^3$, d'après le tableau des variations.

Ainsi, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen soit minimal est d'environ: $x \approx 20,09$ **cad**: $x \approx 2\,009$ pièces.

2. a. a2. Déterminons le coût moyen minimal, au centime d'euro près:

Cela revient à déterminer: $f(e^3)$.

Or: $f(e^3) = b = 1 - \frac{1}{e^3}$, **d'après le tableau des variations**.

Ainsi, le coût moyen minimal pour fabriquer 2 009 pièces est d'environ:

$$CM_{min} \approx 0,95 \text{ euro/pièce}.$$

2. b. Déterminons le nombre minimal de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à 1,50 euro:

Il s'agit de déterminer x tel que: $f(x) \leqslant 1,5$.

En ayant recours à la réponse de la question **1. e.**, nous pouvons affirmer qu'en fabriquant au minimum 232 pièces **(2,32 x 100)**, le coût moyen de fabrication d'une pièce sera inférieur ou égal à 1,50 euro.

Au total: en fabriquant au minimum 232 pièces électroniques, le coût moyen de fabrication d'une pièce sera inférieur ou égal à 1,50 euro.

2. c. Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes ?

La réponse de la question **2. a. a2.** nous indique que le coût moyen minimal est de:

$$\mathbf{0,95 \text{ euro}} \left(1 - \frac{1}{e^3}\right).$$

Comme $0,95 > 0,5$: **non**, il n'est pas possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes.