Spé Maths
Terminale

Fonctions, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION, SYNTHÈSE 27

CORRECTION

1. Calculons la dérivée f' de f:

Ici: • $f(x) = 1 + (-4x^2 - 10x + 8)\, e^{-0,5x}$ $(1 + u \times e^{v})$

• $Df = [-4\,;\,10]$.

f est dérivable sur $[-4\,;\,10]$, nous pouvons donc calculer sa dérivée f'.

Pour tout $x \in [-4\,;\,10]$:

$f'(x) = 0 + (-8x - 10) \times (e^{-0,5x}) + (-4x^2 - 10x + 8) \times (-0,5e^{-0,5x})$

$(0 + u' \times e^{v} + u \times v' \times e^{v})$

$= (-8x - 10) \times (e^{-0,5x}) + (2x^2 + 5x - 4) \times (e^{-0,5x})$

$= (2x^2 - 3x - 14) \times e^{-0,5x}$.

Au total, pour tout $x \in [-4\,;\,10]$, nous avons bien: $f'(x) = (2x^2 - 3x - 14) \times e^{-0,5x}$.

2. Dressons le tableau des variations de f sur $[-4\,;\,10]$:

Préalablement, résolvons l'équation: $2x^2 - 3x - 14 = 0$ (1).

$\Delta = 9 - 4 \times 2 \times (-14)$ cad: $\Delta = 121 = (11)^2 > 0$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation (1) admet 2 solutions:

• $x_1 = \dfrac{3 - 11}{4}$ cad: $x_1 = -2$,

• $x_2 = \dfrac{3+11}{4}$ **cad**: $x_2 = 3,5$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-4 ; 10]$:

• **1er cas**: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0$ ssi $2x^2 - 3x - 14 \leqslant 0$ **cad ssi**: $x \in [-2 ; 3,5]$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,5x} > 0$)

• **2ème cas**: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $2x^2 - 3x - 14 \geqslant 0$ **cad ssi**: $x \in [-4 ; -2] \cup [3,5 ; 10]$.

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-0,5x} > 0$)

Au total: • f est décroissante sur $[-2 ; 3,5]$,

• f est croissante sur $[-4 ; -2] \cup [3,5 ; 10]$.

Nous pouvons donc dresser le tableau des variations suivant:

x	-4		-2		$3,5$		10
f'		+	0	-	0	+	
f	a	↗	b	↘	c	↗	d

Avec: • $a = f(-4) = 1 - 16\,e^{2}$,

• $b = f(-2) = 1 + 12\,e$,

• $c = f(3,5) = 1 - 76\,e^{-\frac{7}{2}}$,

• $d = f(10) = 1 - 492\,e^{-5}$.

3. a. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-4;-2]$:

Sur $[-4;-2]$, $f(x) = 0 \iff 1 + (-4x^2 - 10x + 8)\,e^{-0,5x} = 0$.

Or, nous ne pouvons pas résoudre cette équation.

Donc nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à la question demandée.

- Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.

  Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a;b]$ tel que: $f(c) = K$.

  Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a;b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a;b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a;b]$.

Ici:
- f est continue sur $[-4;10]$, donc sur $[-4;-2]$.
- " $k = 0$ " est compris entre: $f(-4) = 1 - 16\,e^2 < 0$

  et: $f(-2) = 1 + 12\,e > 0$.
- f est strictement croissante sur $[-4;-2[$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet une unique solution α appartenant à $[-4;-2[$.

Au total: $f(x) = 0$ admet exactement une solution unique α sur $[-4;-2[$.

3. b. Recopions et complétons la seconde ligne du tableau:

La seconde ligne du tableau recopiée et complétée est la suivante:

	m	signe de p	a	b	b - a	b - a > 10^{-1}
Après le 2e passage dans la boucle	-3, 5	Positif	-3, 5	-3	0, 5	VRAI

3. c. Interprétons les résultats:

Cela signifie que la solution α de l'équation $f(x) = 0$ est telle que:

$$-3,1875 \leqslant \alpha \leqslant -3,125.$$

4. Calculons la valeur moyenne de f sur [- 4; 10]:

D'après le cours, la valeur moyenne **m** de f sur [- 4; 10] est telle que.

$$m = \frac{1}{10 - (-4)} \int_{-4}^{10} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{14} \times [\,F(x)\,]_{-4}^{10}$$

$$= \frac{1}{14} \times [\,x + (8x^2 + 52x + 88)\,e^{-0,5x}\,]_{-4}^{10}$$

$\approx$ -2, 54, arrondie au centième.

Ainsi, la valeur moyenne de f sur [- 4; 10] est d'environ: -2, 54.