

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Fonctions, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. Calculons f' , pour tout réel x de l'intervalle $[1; 9]$:

Ici: • $f(x) = 0,5x^2 - 7x + 14 + 6\ln x$

• $Df = [1; 9]$.

D'après l'énoncé, f est dérivable sur $[1; 9]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [1; 9]$.

Pour tout $x \in [1; 9]$: $f'(x) = x - 7 + \frac{6}{x}$ cad: $f'(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x}$.

Au total, pour tout $x \in [1; 9]$, nous avons bien: $f'(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x}$.

2. a. Etudions les variations de f sur l'intervalle $[1; 9]$:

Préalablement, résolvons l'équation: $x^2 - 7x + 6 = 0$, pour tout $x \in [1; 9]$ (1).

$\Delta = 49 - 4 \times 1 \times 6$ cad: $\Delta = 25 = (5)^2 > 0$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation (1) admet 2 solutions:

• $x_1 = \frac{7-5}{2}$ cad: $x_1 = 1$,

$$\bullet x_2 = \frac{7+5}{2} \text{ cad: } x_2 = 6.$$

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [1; 9]$:

$$\bullet 1^{\text{er}} \text{ cas: } f'(x) \leq 0.$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } x^2 - 7x + 6 \leq 0 \text{ cad ssi: } x \in [1; 6].$$

$$\bullet 2^{\text{ème}} \text{ cas: } f'(x) \geq 0.$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } x^2 - 7x + 6 \geq 0 \text{ cad ssi: } x \in [6; 9].$$

Au total: $\bullet f$ est décroissante sur $[1; 6]$,

$\bullet f$ est croissante sur $[6; 9]$.

Nous pouvons donc dresser le tableau des variations suivant:

x	1	6	9	
f'	0	-	0	+
f	a	b	c	

Avec: $\bullet a = 7,5,$

$$\bullet b = -10 + 6 \ln(6),$$

$$\bullet c = -8,5 + 6 \ln(10).$$

2. b. Justifions que, sur l'intervalle $[1; 9]$, l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α :

Nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a; b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a; b]$ tel que: $f(c) = K$.

Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a; b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement "croissante" ou "décroissante" sur $[a; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une **unique** solution appartenant à $[a; b]$.

Ici: • f est continue sur $]1; 9[$, donc sur $]1; 6[$.

- " $k = 5$ " est compris entre: $f(6) = -10 + 6 \ln(6) < 5$

$$\text{et: } f(1) = 7,5 > 5.$$

- f est strictement décroissante sur $]1; 6[$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 5$ ($k = 5$) admet une **unique** solution α appartenant à l'intervalle $]1; 6[$.

Au total: $f(x) = 5$ admet exactement une solution unique α sur $]1; 6[$.

2. c. Donnons un encadrement au centième près de α :

A l'aide d'une machine à calculer, nous pouvons dire que:

$$2,55 \leq \alpha \leq 2,56.$$

Au total, un encadrement au centième près de α est:

$$2,55 \leq \alpha \leq 2,56.$$

2. d. Déterminons la valeur numérique que contient la variable X à la fin de l'exécution de l'algorithme:

A la fin de l'exécution de l'algorithme: $X = 2,56$.

Ainsi, la valeur numérique que contient X à la fin de l'exécution est: $2,56$.

3. Déterminons la quantité de pneus pour que le coût moyen de fabrication d'un pneu soit minimal:

D'après l'énoncé la fonction f modélise le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu (en centaines d'euros), pour x centaines de pneus produits.

Dans ces conditions, le coût moyen annuel est minimal quand f est minimale cad quand f atteint son minimum.

Or f atteint son minimum quand: $x = 6$, d'après le tableau des variations.

Et dans ce cas: $f(6) \approx 0,75$.

Ainsi: • le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu est minimal quand l'entreprise fabrique $6 \times 100 = 600$ pneus;

• et, ce coût minimum par pneu est égal à $f(6) \times 100 \approx 0,75$ €.

Partie B:

1. Donnons une primitive G de la fonction g sur $[0; 100]$:

Ici: • $g(x) = 2x - 1 + e^{0,05x}$

• $Dg = [0; 100]$.

Dans ces conditions, une primitive G de g sur $[0; 100]$ est:

$$G(x) = x^2 - x + \frac{1}{0,05} e^{0,05x}.$$

Ainsi sur $[0; 100]$: $G(x) = x^2 - x + \frac{1}{0,05} e^{0,05x}.$

2. Calculons la valeur moyenne de la fonction g sur $[0; 100]$:

D'après le cours, la valeur moyenne m de g sur $[0; 100]$ est telle que:

$$m = \frac{1}{100 - 0} \int_0^{100} g(x) dx.$$

La fonction g est continue sur $[0; 100]$; elle admet donc des primitives

sur $[0; 100]$ et par conséquent: $\int_0^{100} g(x) dx$ existe.

$$\begin{aligned} \text{D'où: } m &= \frac{1}{100} \left[G(x) \right]_0^{100} \\ &= \frac{1}{100} \left[x^2 - x + \frac{1}{0,05} e^{0,05x} \right]_0^{100} \\ &= \frac{1}{100} (10\,000 - 100 + 20 e^5 - 20) \\ &= \frac{9880 + 20e^5}{100}. \end{aligned}$$

Au total: $m = 98,8 + 0,2 e^5 \approx 128,48.$

3. Interprétons le résultat obtenu:

Cela signifie qu'un semoir coûte en moyenne: $128,48 \times 100 = 12\,848 \text{ €}$
à fabriquer par l'entreprise.