Spé Maths
Terminale

Fonctions, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION, SYNTHÈSE 18

CORRECTION

Partie A: Modélisation de l'âge d'un épicéa

1. Démontrons que la fonction f est strictement croissante sur $]\,0\,;\,1\,[$:

Ici: • $f(x) = 30 \ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right)$ $\left(30 \times \ln\left(\dfrac{u}{v}\right)\right)$

• $Df =]\,0\,;\,1\,[$.

• **Calculons f ':**

Posons: $f = 30 \ln\left(\dfrac{g_1}{g_2}\right)$, avec: $g_1(x) = 20x$ et $g_2(x) = 1 - x$.

g_1 et g_2 sont dérivables sur ¨ comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle $]\,0\,;\,1\,[$.

Dans ces conditions, $\dfrac{g_1}{g_2}$ est dérivable sur $]\,0\,;\,1\,[$ comme quotient $\left(\dfrac{g_1}{g_2}\right)$ de 2 fonctions dérivables sur $]\,0\,;\,1\,[$, avec: pour tout $x \in]\,0\,;\,1\,[$, $g_2(x) \neq 0$.

Par conséquent, f est dérivable sur $]\,0\,;\,1\,[$ comme composée $\left(\ln\left(\dfrac{g_1}{g_2}\right)\right)$ de 2 fonctions dérivables sur $]\,0\,;\,1\,[$, avec: $\dfrac{g_1}{g_2} > 0$ sur $]\,0\,;\,1\,[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]\,0\,;\,1\,[$.

Pour tout $x \in]\,0\,;\,1\,[$:

$$f'(x) = 30 \times \left[\frac{\dfrac{(20)(1-x) - (20x) \times (-1)}{(1-x)^2}}{\dfrac{20x}{1-x}} \right] \qquad \left(30 \times \frac{\left(\frac{u}{v}\right)'}{\left(\frac{u}{v}\right)} \right)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{30}{x(1-x)}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0;1[$: $f'(x) = \dfrac{30}{x(1-x)}$.

• **Pour tout $x \in]0;1[$, $f'(x) > 0$?**

Oui, sur $]0;1[$, $f'(x) > 0$.

Au total : sur $]0;1[$, f est strictement croissante.

2. Déterminons les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge soit compris entre 20 et 120 ans :

Il s'agit ici de déterminer x tel que : $20 \leqslant f(x) \leqslant 120$.

$$20 \leqslant f(x) \leqslant 120 \iff 20 \leqslant 30 \times \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) \leqslant 120$$

$$\iff \frac{2}{3} \leqslant \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right) \leqslant 4$$

$$\iff e^{\frac{2}{3}} \leqslant \frac{20x}{1-x} \leqslant e^4$$

$$\iff e^{\frac{2}{3}}(1-x) \leqslant 20x \leqslant e^4(1-x)$$

$$\iff e^{\frac{2}{3}}(1-x) \leqslant 20x \text{ et } 20x \leqslant e^4(1-x).$$

• $e^{\frac{2}{3}}(1-x) \leqslant 20x \iff e^{\frac{2}{3}} \leqslant (20+e^{\frac{2}{3}})\,x \implies x \geqslant \dfrac{e^{\frac{2}{3}}}{20+e^{\frac{2}{3}}}$.

• $20x \leqslant e^4(1-x) \iff (20+e^4)\,x \leqslant e^4 \implies x \leqslant \dfrac{e^4}{20+e^4}$.

Au total, les valeurs du diamètre D du tronc sont telles que:

$$\frac{e^{\frac{2}{3}}}{20+e^{\frac{2}{3}}} \leqslant D \leqslant \frac{e^4}{20+e^4}.$$

En cm, les valeurs du diamètre D du tronc sont telles que: 9 cm $\leqslant$ D $\leqslant$ 73 cm.

Partie B: Vitesse et hauteur d'un épicéa

1. a. Interprétons le nombre " 0, 245 ":

" 0, 245 " signifie qu'entre l'âge de 70 ans et l'âge de 80 ans, la hauteur de l'arbre est passée de 15, 6 m à 18, 05 m, et ce, à un taux de croissance annuel moyen de: " **0, 245 mètres par année** ".

1. b. Déterminons la formule à entrer dans C_3:

La formule à entrer dans C_3 est: << $= \dfrac{C_2 - B_2}{C_1 - B_1}$ >>.

2. Déterminons la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre vaut 27 cm:

• **Détermination de l'âge de l'épicéa ayant 27 cm de diamètre:**

Le diamètre vaut 27 cm, d'où: $x = 0,27$ mètre.

Dans ces conditions, l'âge correspondant à 27 cm de diamètre est:

$$y = f(0,27) \implies y \approx 60 \text{ ans.}$$

En supposant le taux de croissance annuel moyen égal à 0, 22 (entre 50 ans et 70 ans), à l'âge de 60 ans la hauteur attendue de l'épicéa sera de:

$$\frac{11,2 + 15,6}{2} = 13,4 \text{ mètres.}$$

Au total, la hauteur attendue d'un épicéa de diamètre de 27 cm est de:

13, 4 mètres.

3. a. Déterminons un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure:

Pour répondre à cette question, nous allons calculer la vitesse de croissance (V) aux points F, G, H, I, J, K, L et M.

F	G	H	I	J	K	L	M
V = 0, 25	0, 25	0, 24	0, 24	0, 24	0, 22	0, 205	0, 1675

D'où la vitesse de croissance est maximale quand elle est égale à: 0, 25.

Ainsi, l'intervalle d'âges demandé est: $[80; 95] = [E; G]$.

3. b. Est-il cohérent de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?

Si le diamètre vaut environ 70 cm: $x = 0,70$ mètre.

Dans ces conditions, l'âge correspondant est: $y = f(0,70) \implies y \approx 115$ ans.

Or quand l'âge est de 115 ans, la vitesse de croissance $V \in]0,24; 0,22[$.

Ainsi, il n'est pas rationnel de couper les arbres car, à ce moment-là, la vitesse de croissance n'est pas maximale.