

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Spé Maths

## Terminale

Fonctions, Synthèse



**ÉNONCÉ** DE L'EXERCICE

# FONCTION

## Partie A

On considère la fonction  $h$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :  $h(x) = xe^{-x}$ .

1. Déterminer la limite de la fonction  $h$  en  $+\infty$ .
2. Étudier les variations de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et dresser son tableau de variations.
3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction  $h$ .
  - a. Vérifier que pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$ , on a :

$$h(x) = e^{-x} - h'(x)$$

où  $h'$  désigne la fonction dérivée de  $h$ .

- b. Déterminer une primitive sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  de la fonction  $x \mapsto e^{-x}$ .
- c. Dédire des deux questions précédentes une primitive de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

## Partie B

On définit les fonctions  $f$  et  $g$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1).$$

On note  $C_f$  et  $C_g$  les représentations graphiques respectives des fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère orthonormé.

*Ces deux courbes sont tracées en annexe.*

1. Pour un nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$ , on appelle M le point de coordonnées  $(x; f(x))$  et N le point de coordonnées  $(x; g(x))$  : M et N sont donc les points d'abscisse  $x$  appartenant respectivement aux courbes  $C_f$  et  $C_g$ .
  - a. Déterminer la valeur de  $x$  pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.
  - b. Placer sur le graphique fourni en annexe les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN.
2. Soit  $\lambda$  un réel appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$ . On note  $D_\lambda$  le domaine du plan délimité par les courbes  $C_f$  et  $C_g$  et par les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \lambda$ .
  - a. Hachurer le domaine  $D_\lambda$  correspondant à la valeur  $\lambda$  proposée sur le graphique en annexe.
  - b. On note  $A_\lambda$  l'aire du domaine  $D_\lambda$ , exprimée en unités d'aire. Démontrer que :

$$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda}.$$

- c. Calculer la limite de  $A_\lambda$  lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$  et interpréter le résultat.

3. On considère l'algorithme suivant :

<b>Variables :</b> $\lambda$ est un réel positif $S$ est un réel strictement compris entre 0 et 1.
<b>Initialisation :</b> Saisir $S$ $\lambda$ prend la valeur 0
<b>Traitement :</b> Tant Que $1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda} < S$ faire $\lambda$ prend la valeur $\lambda + 1$ Fin Tant Que
<b>Sortie :</b> Afficher $\lambda$

- a. Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur  $S = 0,8$  ?
- b. Quel est le rôle de cet algorithme ?

# ANNEXE

