

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Fonctions, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Montrons que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel $x \in [1; 5]$, $f_n'(x) = \frac{1 - n \ln(x)}{x^{n+1}}$.

Ici: • $f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n}$ $\left(\frac{u}{v}\right)$

• $Df = [1; 5]$.

Posons: $f_n = \frac{f_1}{f_2}$, avec: $f_1(x) = \ln(x)$ et $f_2(x) = x^n$.

f_1 est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme fonction "ln", donc dérivable sur l'intervalle $[1; 5]$.

f_2 est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[1; 5]$.

Par conséquent, f_n est dérivable sur $[1; 5]$ comme quotient $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$ de deux fonctions dérivables sur $[1; 5]$, avec: pour tout $x \in [1; 5]$, $f_2(x) \neq 0$.

Ainsi, nous pouvons calculer f_n' pour tout $x \in [1; 5]$.

Pour tout $x \in [1; 5]$:

$$f_n'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right) x (x^n) - (\ln(x)) x (n x^{n-1})}{(x^n)^2} \quad \left(\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}\right)$$

$$= \frac{x^{n-1} - n x^{n-1} \ln(x)}{x^{2n}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^{n-1} (1 - n \ln(x))}{x^{2n}} \\
 &= \frac{x^{-1} (1 - n \ln(x))}{x^n} \\
 &= \frac{1 - n \ln(x)}{x^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1; 5]$: $f_n'(x) = \frac{1 - n \ln(x)}{x^{n+1}}$.

2. Montrons que tous les points A_n appartiennent à une même courbe d'équation $y = \frac{1}{e} \ln(x)$:

D'après l'énoncé: "on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1; 5]$ ".

Soit $A_n(x_n; y_n)$, le maximum de la fonction f_n sur $[1; 5]$.

L'abscisse x_n vérifie donc: $f_n'(x_n) = 0$.

$$f_n'(x_n) = 0 \iff \frac{1 - n \ln(x_n)}{x_n^{n+1}} = 0$$

$$\iff 1 - n \ln(x_n) = 0, \text{ car: sur } [1; 5], x_n^{n+1} \neq 0$$

$$\iff x_n = e^{\frac{1}{n}}.$$

Dans ces conditions, les coordonnées du point A_n sont respectivement:

$$x_n = e^{\frac{1}{n}} \text{ et } y_n = f(x_n) = \frac{\ln(x_n)}{x_n^n},$$

$$\text{ou: } x_n = e^{\frac{1}{n}} \text{ et } y_n = \frac{\frac{1}{n}}{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n} = \frac{1}{n \times e}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or: } \frac{1}{n \times e} &= \frac{1}{e} \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{e} \times \ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right) \\ &= \frac{1}{e} \times \ln(x_n). \end{aligned}$$

D'où, nous avons: $y_n = \frac{1}{e} \times \ln(x_n)$, pour tout $x \in [1; 5]$.

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1; 5]$, tous les points A_n appartiennent à une même courbe d'équation: $y_n = \frac{1}{e} \ln(x_n)$.

3. a. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1; 5]$, $0 \leq \frac{\ln(x)}{x^n} \leq \frac{\ln(5)}{x^n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1; 5]$, nous avons:

$$1 \leq x \leq 5$$

$$\Leftrightarrow \ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(5)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \ln(x) \leq \ln(5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{0}{x^n} \leq \frac{\ln(x)}{x^n} \leq \frac{\ln(5)}{x^n}, \text{ avec: pour tout } x \in [1; 5], x^n > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\ln(x)}{x^n} \leq \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1; 5]$: $0 \leq \frac{\ln(x)}{x^n} \leq \frac{\ln(5)}{x^n}$.

3. b. Montrons l'égalité demandée pour tout entier $n > 1$:

f_n est continue sur $[1; 5]$, elle admet donc des primitives sur $[1; 5]$ et

par conséquent: $\int_1^5 \frac{1}{x^n} dx$ existe.

$$\begin{aligned} \int_1^5 \frac{1}{x^n} dx &= \int_1^5 x^{-n} dx \\ &= \left[\frac{1}{1-n} x^{1-n} \right]_1^5 \\ &= \frac{1}{1-n} (5^{1-n} - 1) \\ &= \frac{1}{n-1} (1 - 5^{1-n}) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Au total, pour tout entier $n > 1$ et $x \in [1; 5]$: $\int_1^5 \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right)$.

3. c. Déterminons la valeur limite de l'aire demandée quand n tend vers $+\infty$:

L'aire, exprimée en unités d'aire, sous la courbe \mathcal{C}_n cad l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe

\mathcal{C}_n correspond à: $\int_1^5 f_n(x) dx$.

$$\text{Or: } \int_1^5 f_n(x) dx = \int_1^5 \frac{\ln(x)}{x^n} dx,$$

et d'après la question 3. b.: $0 \leq \frac{\ln(x)}{x^n} \leq \frac{\ln(5)}{x^n}$.

Posons pour tout $x \in [1; 5]$: $f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n}$,

- $g_1(x) = 0,$
- $g_2(x) = \frac{\ln(5)}{x^n}.$

Notons que:

- les fonctions f_n , g_1 et g_2 sont continues sur $[1; 5]$;
- elles admettent donc des primitives sur $[1; 5]$, et par conséquent:

$$\int_1^5 f_n(x) dx, \int_1^5 g_1(x) dx \text{ et } \int_1^5 g_2(x) dx \text{ existent};$$

- de plus, les fonctions f_n , g_1 et g_2 sont positives sur $[1; 5]$;
- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire:

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x^n} \leq \frac{\ln(5)}{x^n}$$

$$\Leftrightarrow g_1(x) \leq f_n(x) \leq g_2(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_1^5 g_1(x) dx \leq \int_1^5 f_n(x) dx \leq \int_1^5 g_2(x) dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_1^5 f_n(x) dx \leq \ln(5) \left[\frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right) \right], \text{ d'après question 3. b.}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_1^5 f_n(x) dx \leq \frac{\ln(5)}{n-1} - \frac{\ln(5)}{(n-1)(5^{n-1})}.$$

Or quand n tend vers $+\infty$:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$ (terme de gauche)

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(5)}{n-1} - \frac{\ln(5)}{(n-1)(5^{n-1})} \right) = 0$ (terme de droite).

D'où, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^5 f_n(x) dx = 0.$$

Au total, la valeur limite de l'aire demandée quand n tend vers $+\infty$ est:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^5 f_n(x) dx = 0.$$