Spé Maths
Terminale

Fonctions, Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

FONCTION

On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier naturel n non nul $I_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $I_0 = \ln(2)$.

2. **a.** Calculer $I_0 - I_1$.
b. En déduire I_1.

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.
b. Proposer un algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel n donné, la valeur de I_n .

4. Soit n un entier naturel non nul.
On admet que si x appartient à l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ alors $0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$.
b. En déduire la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \cdots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$.
a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $S_n = I_0 - I_n$.
b. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.