

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Fonctions, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Montrons que $I_0 = \ln(2)$:

D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\bullet I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx,$

$\bullet I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx.$

Soit h , la fonction définie sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par: $h(x) = \frac{1}{1-x}.$

La fonction h est continue sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ (avec $1-x \neq 0$), elle admet donc des

primitives sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et par conséquent: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx$ existe.

D'où: $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx$

$$= - \left[\ln(1-x) \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= - \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(1) \right)$$

$$= - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ cad: } I_0 = \ln(2).$$

Donc nous avons bien: $I_0 = \ln(2).$

2. a. Calculons $I_0 - I_1$:

$$\begin{aligned} I_0 - I_1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \cdot dx \\ &= \left[x \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Au total: $I_0 - I_1 = \frac{1}{2}$.

2. b. Déduisons-en I_1 :

Nous savons que: • $I_0 = \ln(2)$

• $I_0 - I_1 = \frac{1}{2}$

D'où: $I_1 = I_0 - \frac{1}{2}$ cad: $I_1 = -\frac{1}{2} + \ln(2)$.

Ainsi: $I_1 = -\frac{1}{2} + \ln(2)$.

3. a. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$:

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}: I_n - I_{n+1} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{1-x} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^n - x^{n+1}}{1-x} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n \times (1-x)}{(1-x)} dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\frac{1}{2}} \text{ cad: } I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}.
\end{aligned}$$

Au total, nous avons bien: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.

3. b. Proposons l'algorithme demandée:

L'algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel n donné, la valeur de I_n est le suivant:

$I \leftarrow \ln(2)$

$k \leftarrow 0$

Tant que $k < n$ faire

$$\begin{array}{l}
| k \leftarrow k + 1 \\
| I \leftarrow I - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k}
\end{array}$$

Fin Tant que

Afficher I

4. a. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$:

Pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons:

$$\bullet g_1(x) = 0,$$

$$\bullet f(x) = \frac{x^n}{1-x},$$

$$\bullet g_2(x) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Notons que:

- les fonctions g_1, f et g_2 sont continues sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$;

- elles admettent donc des primitives sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$,
et par conséquent:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g_1(x) dx, \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \text{ et } \int_0^{\frac{1}{2}} g_2(x) dx \text{ existent;}$$

- de plus, les fonctions g_1, f et g_2 sont positives sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$;

- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire:

$$0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} g_1(x) dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} g_2(x) dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^n}{1-x}\right) dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^n}{1-x}\right) dx \leq \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$. (a)

4. b. Déduisons-en la limite de la suite (I_n) en $+\infty$:

Quand n tend vers $+\infty$: • $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$ (terme de gauche de (a))

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ (terme de droite de (a)).

D'où d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Au total: $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

5. a. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = I_0 - I_n$:

Pour tout entier naturel n non nul, nous avons:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$$

$$= [I_0 - I_1] + [I_1 - I_2] + [I_2 - I_3] + \dots + [I_{n-1} - I_n]$$

$$\left(\text{car: } I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} \right)$$

cad: $S_n = I_0 - I_n$, après simplification !

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons bien: $S_n = I_0 - I_n$.

5. b. Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} I_0 - I_n \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} I_0 \right) - \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \right) \\ &= \ln(2) - 0 \\ &= \ln(2).\end{aligned}$$

Au total: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(2)$.