Spé Maths
Terminale

Fonctions, Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

FONCTION

Partie A : établir une inégalité

Sur l'intervalle $[0;+\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = x - \ln(x+1)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. En déduire que pour tout $x \in [0;+\infty[$, $\ln(x+1) \leq x$.

Partie B : application à l'étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n)$. On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

1. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2.

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 1$.

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3. On note l la limite de la suite (u_n) et on admet que $l = f(l)$ où f est la fonction définie dans la partie A. En déduire la valeur de l.

4. **a**. Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-p}.

b. Déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15} .