

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Fonctions, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A: Établir une inégalité

1. Étudions le sens de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$:

• Calculons f' :

Ici: • $f(x) = x - \ln(x + 1)$ $[u - \ln(v)]$

• $Df = [0; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0; +\infty[$.

Pour tout $x \in [0; +\infty[:$ $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$ $\left[u' - \frac{v'}{v} \right]$

cad: $f'(x) = \frac{x}{x+1}$.

Au total: pour tout $x \in [0; +\infty[:$ $f'(x) = \frac{x}{x+1}$.

• Étudions le signe de f' sur $[0; +\infty[:$:

Sur $[0; +\infty[:$ $f'(x) \geq 0$.

Ainsi: f est croissante sur $[0; +\infty[$.

Nous pouvons dresser alors le tableau de variation suivant:

x	0	$+\infty$
f'	0	+
f	0	$+\infty$

, car: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x+1) = +\infty$.

2. Dédisons-en que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $\ln(x+1) \leq x$:

D'après le tableau de variation précédent, nous avons pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$f(x) \geq 0 = f(0) \Leftrightarrow x - \ln(x+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq \ln(x+1) \text{ ou: } \ln(x+1) \leq x.$$

Au total, pour tout $x \in [0; +\infty[$, nous avons bien: $\ln(x+1) \leq x$.

Partie B: Application à l'étude d'une suite

1. Calculons une valeur approchée à 10^{-3} près de U_2 :

Ici: • $U_{n+1} = U_n - \ln(1 + U_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $U_0 = 1$.

Dans ces conditions:

• $U_1 = U_0 - \ln(1 + U_0) \Leftrightarrow U_1 = 1 - \ln(1 + 1)$ cad: $U_1 = 1 - \ln(2)$,

• $U_2 = U_1 - \ln(1 + U_1) \Leftrightarrow U_2 = (1 - \ln(2)) - \ln(1 + (1 - \ln(2)))$

cad: $U_2 \approx 0,0382$.

Au total, une valeur approchée à 10^{-3} près de U_2 est environ: 0,0382.

2. a. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $U_n \geq 0$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n : $U_n \geq 0$ ".

Initialisation: • $U_0 = 1 \geq 0$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $U_1 = 1 - \ln(2) \geq 0$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \geq 0$
et montrons qu'alors $U_{n+1} \geq 0$.

Supposons: $U_n \geq 0$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$$(1) \Rightarrow 1 + U_n \geq 1 + 0$$

$$\Rightarrow \ln(1 + U_n) \geq \ln(1)$$

$$\Rightarrow -\ln(1 + U_n) \leq 0$$

$$\Rightarrow U_n - \ln(1 + U_n) \leq 1 - 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_n - \ln(1 + U_n) \leq 1, \text{ d'après PARTIE A (question 2.)}$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 1$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \geq 0.$$

Conclusion: Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 0$, et même " $0 \leq U_n \leq 1$ ".

2. b. b1. Démontrons que la suite (U_n) est décroissante:

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer le signe de: $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n - \ln(1 + u_n) - u_n \\ &= -\ln(1 + u_n). \end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

D'où: $-\ln(1 + u_n) \leq 0$ cad: $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Au total, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$:

la suite (u_n) est décroissante.

2. b. b2. Déduisons-en que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 1$:

Comme déjà vu précédemment: Pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 1$.

2. c. Montrons que la suite (u_n) est convergente:

D'après le cours, nous savons que toute suite décroissante et minorée est convergente.

Or ici: • $u_{n+1} - u_n \leq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc la suite (u_n) est décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• $0 \leq u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc la suite (u_n) est minorée par $m = 0$.

Dans ces conditions: la suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Déduisons-en la valeur de ℓ :

La suite (U_n) étant convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$, elle admet pour limite:

$$\ell \geq 0 \text{ telle que } \ell = f(\ell).$$

$$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \ell - \ln(1 + \ell) \text{ cad: } \ell = 0.$$

Au total: la suite (U_n) est convergente et converge vers $\ell = 0$.

4. Écrivons l'algorithme demandée:

L'algorithme demandée est le suivant:

$$N \leftarrow 0$$

$$U \leftarrow 1$$

Tant que $U \geq 10^{-p}$

$$\begin{array}{|l} U \leftarrow U - \ln(1 + U) \\ N \leftarrow N + 1 \end{array}$$

Fin Tant que

Afficher N