Spé Maths
Terminale

Fonctions, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

FONCTION, SYNTHÈSE 10

CORRECTION

1. a/. Calculons f' sur l'intervalle $]0\,;1]$:

Ici: • $f(x) = x\,(1 - \ln x)^2$ $(u \times (v)^2)$

• $Df =]0\,;1]$.

Posons: $f = f_1 \times (f_2 + f_3)^2$, avec: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1$ et $f_3(x) = -\ln x$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle $]0\,;1]$.

f_3 est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme fonction " ln ", donc dérivable sur l'intervalle $]0\,;1]$.

Dans ces conditions, la fonction $f_2 + f_3$ est dérivable sur $]0\,;1]$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0\,;1]$.

De même, la fonction $h(x) = (f_2 + f_3)^2$ est dérivable sur $]0\,;1]$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $]0\,;1]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $]0\,;1]$ comme produit $(f_1 \times h)$ de deux fonctions dérivables sur $]0\,;1]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0\,;1]$.

Pour tout $x \in]0\,;1]$: $f'(x) = (1) \times (1 - \ln x)^2 + (x) \times (2) \times (1 - \ln x) \times \left(-\dfrac{1}{x}\right)$

$(u' \times (v)^2 + u \times 2 \times (v)^1 \times v')$

$((w^n)' = n\,(w^{n-1}) \times w')$

cad: $f'(x) = (1 - \ln x)^2 - 2 \times (1 - \ln x)$.

Au total, pour tout $x \in]\, 0 ; 1 \,]$: $f'(x) = (1 - \ln x)^2 - 2 \times (1 - \ln x)$.

1. a2. Factorisons f' sur $]\, 0 ; 1 \,]$:

Pour tout $x \in]\, 0 ; 1 \,]$: $f'(x) = (1 - \ln x)^2 - 2 \times (1 - \ln x)$

$$= (1 - \ln x) \times (1 - \ln x) - 2 + 2 \ln x$$

$$= 1 - \ln x - \ln x + (\ln x)^2 - 2 + 2 \ln x$$

$$= (\ln x)^2 - 1$$

$$= (\ln x + 1)(\ln x - 1) \qquad (a^2 - b^2) = (a + b)(a - b).$$

Au total, pour tout $x \in]\, 0 ; 1 \,]$, nous avons bien: $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$.

1. b. Etudions les variations de f et dressons le tableau de variations sur l'intervalle $]\, 0 ; 1 \,]$:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in]\, 0 ; 1 \,]$, **sachant que**:

$$\ln x - 1 < 0 \text{ sur }]\, 0 ; 1 \,].$$

- **1^er^ cas**: $f'(x) \geq 0$.

$f'(x) \geq 0$ ssi $\ln x + 1 \leq 0$ **cad ssi**: $x \leq e^{-1}$ **ou**: $x \in]\, 0 ; e^{-1} \,]$.

- **2^ème^ cas**: $f'(x) \leq 0$.

$f'(x) \leq 0$ ssi $\ln x + 1 \geq 0$ **cad ssi**: $x \geq e^{-1}$ **ou**: $x \in [\, e^{-1} ; 1 \,]$.

Au total:
- f est croissante sur $]\, 0 ; e^{-1} \,]$,
- f est décroissante sur $[\, e^{-1} ; 1 \,]$.

Nous pouvons donc dresser le tableau des variations suivant:

x	0		e^{-1}		1
f'	‖	$+$		$-$	
f	‖ a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

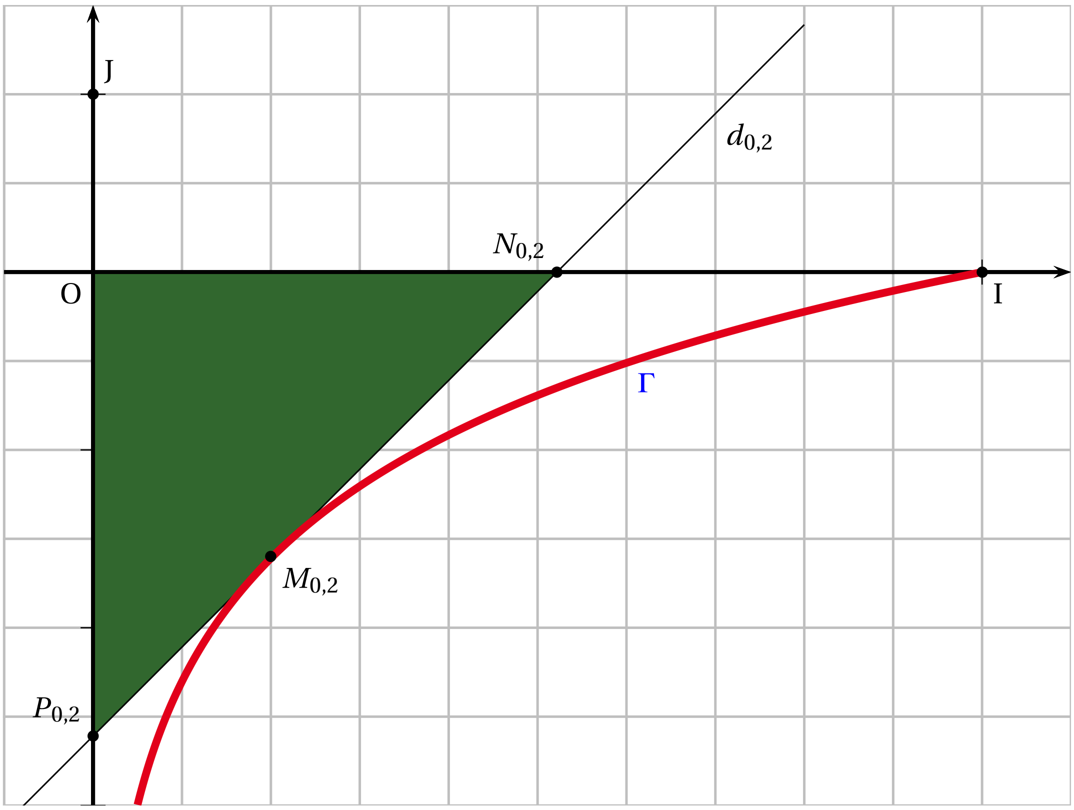
Avec: • $a = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0,$ (d'après l'énoncé)

• $b = f(e^{-1}) = 4\,e^{-1},$

• $c = f(1) = 1.$

2. a. Déterminons graphiquement une estimation de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire:

L'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ correspond à la zone verte du graphique suivant:



Approximativement, cette zone verte correspond à la moitié du rectangle ayant pour côtés: $ON_{0,2}$ et $OP_{0,2}$.

Or: • $ON_{0,2} \approx 0,5$, **(5 carreaux avec: $OI = 10$ carreaux)**

• $OP_{0,2} \approx 2,5$. **(5 carreaux avec: $OJ = 2$ carreaux)**

Dans ces conditions une estimation de l'aire $\mathcal{A}$ du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ est:

$$\mathcal{A} \approx \frac{0,5 \times 2,5}{2} \quad \text{cad:} \quad \mathcal{A} \approx 0,625 \text{ u.a}$$

Au total, graphiquement une estimation de l'aire demandée est: $\mathcal{A} \approx 0,625$ u.a

2. b. Déterminons une équation de la tangente $d_{0,2}$:

L'équation réduite de la tangente $d_{0,2}$ au point $M\,(0,2\,;\ln(0,2))$ s'écrit:

$$y = g'(x_M)(x - x_M) + g(x_M)$$

$$= g'(0,2)(x - 0,2) + \ln(0,2).$$

Or ici: • $g(x) = \ln x$,

• $g'(x) = \frac{1}{x}$, pour tout $x \in \,]0\,;1]$,

• $g'(0,2) = 5$.

Dans ces conditions: $y = 5 \times (x - 0,2) + \ln(0,2)$

cad: $y = 5x + (-1 + \ln(0,2))$.

Au total, une équation de la tangente $d_{0,2}$ est: $y = 5x + (-1 + \ln(0,2))$.

2. c. Calculons la valeur exacte de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$:

Nous savons que la tangente $d_{0,2}$ passe par les points $N_{0,2}$ et $P_{0,2}$.

Sachant que son équation est: $y_d = 5x_d + (-1 + \ln(0,2))$, les points $N_{0,2}$ et $P_{0,2}$ ont pour coordonnées respectives: $N_{0,2}\ (x_{dN} ; 0)$ et $P_{0,2}\ (0 ; y_{dP})$.

Déterminons x_{dN} et y_{dP} :

- x_{dN} est tel que: $0 = 5\,x_{dN} + (-1 + \ln(0,2))$ **cad**: $x_{dN} = \dfrac{1 - \ln(0,2)}{5} > 0.$

- y_{dP} est tel que: $y_{dP} = 5 \times 0\,(-1 + \ln(0,2))$ **cad**: $y_{dP} = -1 + \ln(0,2) < 0.$

Dans ces conditions, l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ est:

$$\mathcal{A} = \frac{ON_{0,2} \times OP_{0,2}}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1 - \ln(0,2)}{5}\right) \times (1 - \ln(0,2) \quad (\text{car: } |-1 + \ln(0,2)| = 1 - \ln(0,2))$$

$$\approx \frac{1}{10} \times 6,81$$

cad: $\mathcal{A} \approx 0,681$ u.a

Au total, la valeur exacte du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ est d'environ: $\mathcal{A} \approx 0,681$ u.a

3. a. Déterminons pour quelle valeur de " a " l'aire $\mathcal{A}$ (a) est maximale:

Ici: $\mathcal{A}(a) = \dfrac{1}{2}\, a\,(1 - \ln a)^2$.

Cette aire est maximale quand: $\mathcal{A}'(a) = 0$.

$$\mathcal{A}'(a) = 0 \iff \frac{1}{2} \times (1) \times (1 - \ln a)^2 + \left(\frac{1}{2}\, a\right) \times (2) \times (1 - \ln a)' \times \left(-\frac{1}{a}\right) = 0$$

$\iff (1 - \ln a)^2 - 2\,(1 - \ln a) = 0$

$\iff (1 - \ln a) = 2$

$\iff \ln a = -1$

$\iff a = e^{-1}.$

Ainsi, l'aire $\mathcal{A}$ **(a)** est maximale quand: $a = e^{-1}.$

3. b. Déterminons cette aire maximale:

Cette aire maximale notée $\mathcal{A}_{max}$ est:

$$\mathcal{A}_{max} = \frac{1}{2} \times (e^{-1}) \times (1 - \ln(e^{-1}))^2$$

$$= 2e^{-1} \text{ u.a.}$$

Au total, cette aire maximale est: $\mathcal{A}_{max} = 2e^{-1}$ **u.a.**