Spé Maths
Terminale

Équations Différentielles

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉSOUDRE $y' = ay + f$ 5

CORRECTION

D'après le cours, les fonctions solutions de $y' = ay + f$ ($a \in IR$) sont les fonctions de la forme: $x \rightarrow C e^{ax} + g(x)$, $C \in IR$.

Notons que " g " est une solution particulière de $y' = ay + f$.

1. Vérifions que " g " est bien une solution particulière de (E):

Ici: $g(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x$, pour tout $x \in IR$.

g est dérivable sur IR, et nous avons:

$$g'(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x.$$

Dans ces conditions, pour tout $x \in IR$:

$$g'(x) + g(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x$$

$$= x^2 e^x.$$

Freemaths : Tous droits réservés

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: " g " est bien une solution particulière de (E).

2. Déterminons les solutions générales de l'équation $y' + y = 0$:

Les solutions générales de l'équation $y' + y = 0$ sont :

$$h_1(x) = C \cdot e^{-x},\ C \in \mathbb{R}.$$

3. Déduisons-en toutes les solutions générales de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$:

Les solutions générales de $y' + y = x^2 e^x$ sont :

$$h(x) = h_1(x) + g(x) \quad \text{cad} \quad h(x) = C \cdot e^{-x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x,\ C \in \mathbb{R}.$$

4. Déduisons-en l'unique solution h de (E) telle que $h(1) = 3$:

$$h(1) = 3 \iff C \cdot e^{-1} + \frac{1}{4}e = 3$$

$$\iff C = 3e - \frac{e^2}{4}.$$

Ainsi, l'unique solution h de (E) telle que $h(1) = 3$ est :

$$h(x) = \left(3e - \frac{e^2}{4}\right) \cdot e^{-x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^x.$$

Freemaths : Tous droits réservés