Spé Maths
Terminale

Équations Différentielles

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉSOUDRE $y' = ay + f$ 2

CORRECTION

D'après le cours, les fonctions solutions de $y' = ay + f$ ($a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme: $x \to C\,e^{ax} + g\,(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

Notons que " g " est une solution particulière de $y' = ay + f$.

1. Vérifions que " g " est bien une solution particulière de (E):

Ici: $g\,(x) = 0,4\cos(x) + 0,2\sin(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et nous avons: $g'(x) = -\,0,4\sin(x) + 0,2\cos(x)$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) + 2g(x) = (-\,0,4\sin(x) + 0,2\cos(x)) + 2\,(0,4\cos(x) + 0,2\sin(x))$$

$$= \cos(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: " g " est bien une solution particulière de (E).

2. Déterminons les solutions générales de l'équation $y' + 2y = 0$:

Les solutions générales de l'équation $y' + 2y = 0$ sont:

$$h_1(x) = C.e^{-2x},\ C \in \mathbb{R}.$$

3. Déduisons-en toutes les solutions générales de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$:

Les solutions générales de $y' + 2y = \cos(x)$ sont:

$$h(x) = h_1(x) + g(x)$$

cad $h(x) = C.e^{-2x} + (0,4\cos(x) + 0,2\sin(x))$, $C \in \mathbb{R}$.

4. Déduisons-en l'unique solution h de (E) telle que h (0) = 1:

$h(0) = 1 \iff C.e^0 + 0,4 \times 1 = 1$

$\iff C = 0,6$.

Ainsi, l'unique solution h de (E) telle que h (0) = 1 est:

$$h(x) = 0,6.e^{-2x} + 0,4\cos(x) + 0,2\sin(x).$$