Spé Maths
Terminale

Récurrence, Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

RÉCURRENCE, SYNTHÈSE 8

ÉNONCÉ

On considère deux suites (U_n) et (V_n):

- la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n:

$$U_{n+1} = 2\,U_n - n + 3\,;$$

- la suite (V_n) définie, pour tout entier naturel n, par $V_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.

Une copie d'écran est donnée ci-dessous:

	A	B	C
1	rang n	terme U_n	terme V_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?

2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3080	1024
13	11	6 153	2048
14	12	12 298	4096
15	13	24587	8 192

Conjecturer les limites des suites (U_n) et $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$.

Partie B: Étude de la suite (U_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a:

$$U_n = 3 \times 2^n + n - 2$$

2. Déterminer la limite de la suite (U_n).

3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à **1 million**.

Partie C: Étude de la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$

1. Démontrer que la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a:

$$0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}.$$

Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$.