Spé Maths
Terminale

Récurrence, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉCURRENCE, SYNTHÈSE 8

CORRECTION

Partie A: Conjectures

1. Déterminons les formules qui ont été entrées dans les cellules B_3 et C_3:

Les formules sont:

- En B_3: on entre << = 2 ∧ B_2 - A_2 + 3 >>.
- En C_3: on entre << = 2 ∧ A_3 >>.

2. Conjecturons les limites des suites (U_n) et $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$:

2. a. En ce qui concerne la suite (U_n) :

En lisant la copie d'écran, nous constatons que:

$$U_0 < U_1 < U_2 < U_3 < \ldots < U_{12} < U_{13} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty .$$

Dans ces conditions, la conjecture que nous pouvons émettre sur le sens de variation et la limite de la suite (U_n) est:

" on pourrait, a priori, penser que la suite (U_n) est croissante et elle semble converger vers l'infini quand n tend vers $+\infty$ ".

2. b. En ce qui concerne la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$:

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons, à partir de $n = 3$:

$$\frac{U_3}{V_3} > \ldots > \frac{U_{12}}{V_{12}} > \frac{U_{13}}{V_{13}}.$$

Dans ces conditions, la conjecture que nous pouvons émettre sur le sens de variation et la limite de la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ est:

" on pourrait, a priori, penser que la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ est décroissante à partir de $n \geqslant 3$ et elle semble converger vers 3 quand n tend vers l'infini ".

Au total, il semble que:
- $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{U_n}{V_n}\right) = 3.$

Partie B: Étude de la suite (U_n)

1. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n = 3 \times 2^n + n - 2$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n = 3 \times 2^n + n - 2$ ".

Initialisation: • $U_0 = 3 \times 2^0 + 0 - 2$?

Oui car: $U_0 = 1$ et $3 \times 2^0 + 0 - 2 = 1$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $U_1 = 3 \times 2^1 + 1 - 2$?

Oui car: $U_1 = 5$ et $3 \times 2^1 + 1 - 2 = 5$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Supposons que pour tout entier naturel n, $U_n = 3 \times 2^n + n - 2$ et montrons qu'alors: $U_{n+1} = 3 \times 2^{(n+1)} + (n+1) - 2$.

Supposons: $U_n = 3 \times 2^n + n - 2$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

$(1) \Rightarrow 2\,U_n = 3 \times 2 \times 2^n + 2\,n - 4 \quad (U_{n+1} = 2\,U_n - n + 3)$

$\Rightarrow 2\,U_n = 3 \times 2^{(n+1)} + 2\,n - 4$

$\Rightarrow 2\,U_n - n + 3 = 3 \times 2^{(n+1)} + 2\,n - 4 - n + 3$

$\Rightarrow U_{n+1} = 3 \times 2^{(n+1)} + n - 1$

$\Rightarrow U_{n+1} = 3 \times 2^{(n+1)} + (n+1) - 2$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons: $U_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

2. Déterminons la limite de la suite (U_n):

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 3 \times 2^n + n - 2$$

$$= +\infty \text{ car: } 2 > 1 \text{ et donc: } \lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty.$$

Ainsi, la suite (U_n) est divergente.

3. Déterminons le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million:

Il s'agit de déterminer l'entier naturel minimal " x " tel que: $U_x \geq 1$ million.

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons:

$x = 19$ car $U_{19} \approx 1,572$ millions et $U_{18} \approx 0,787$ million.

Au total, le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million est: 19.

Partie C: Étude de la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$

1. Démontrons que la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3:

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer le signe de:

$$\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n}.$$

$$\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n} = \left(\frac{3 \times 2^{(n+1)} + (n+1) - 2}{2^{(n+1)}}\right) - \left(\frac{3 \times 2^n + n - 2}{2^n}\right)$$

$$= \left(3 + \frac{(n+1) - 2}{2^{(n+1)}}\right) - \left(3 + \frac{n-2}{2^n}\right)$$

$$= \left(\frac{n-1}{2^{(n+1)}}\right) - \left(\frac{n-2}{2^n}\right)$$

$$= \frac{(n-1) - 2(n-2)}{2^{(n+1)}}$$

$$= \frac{-n+3}{2^{(n+1)}}.$$

Dans ces conditions: $\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n} \leqslant 0$ ssi $-n+3 \leqslant 0$ cad ssi $n \geqslant 3$.

Au total: la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ est bien décroissante à partir du rang 3.

2. Déterminons la limite de la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3 \times 2^n + n - 2}{2^n}\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(3 + \frac{n}{2^n} - \frac{2}{2^n}\right)$$

$$= 3 \quad \text{car: } \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} - \frac{2}{2^n} = 0.$$

Ainsi, la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ est convergente et converge vers " 3 ".