Spé Maths
Terminale

Récurrence, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉCURRENCE, SYNTHÈSE 7

CORRECTION

1. Démontrons par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $U_n = 40 - 40 \times 0,5^n$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- L'intervalle de temps entre deux injections est:

  $t_{0,5} = 6,9$ heures arrondi au dixième.

- La concentration initiale du médicament, après la 1ère injection, est:

  $20\ \mu g \cdot L^{-1} \iff U_1 = 20\ \mu g \cdot L^{-1}$.

- Soit U_n, la concentration plasmatique du médicament après la n-ième injection:

  $U_{n+1} = 0,5\ U_n + 20$, pour tout entier $n \geq 1$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel $n \geq 1$: $U_n = 40 - 40 \times 0,5^n$ ".

Initialisation: • $U_1 = 40 - 40 \times (0,5)^1$?

oui car: $U_1 = 20$ et $40 - 40\ (0,5)^1 = 20$.

Donc vrai au rang " 1 ".

• $U_2 = 40 - 40\,(0,5)^2$?

oui car: $U_2 = 0,5\,(20) + 20 = 30$ et $40 - 40\,(0,5)^2 = 30$.

Donc vrai au rang " 2 ".

Hérédité: Supposons que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $U_n = 40 - 40 \times 0,5^n$ et montrons qu'alors: $U_{n+1} = 40 - 40 \times 0,5^{(n+1)}$.

Supposons: $U_n = 40 - 40 \times 0,5^n$, pour un entier naturel $n \geq 1$ fixé.
(1)

$(1) \Rightarrow 0,5\,U_n = 20 - 40 \times 0,5^{(n+1)}$

$\Rightarrow 0,5\,U_n + 20 = 40 - 40 \times 0,5^{(n+1)}$

$\Rightarrow U_{n+1} = 40 - 40 \times 0,5^{(n+1)}$.

Conclusion: Pour tout entier $n \geq 1$, nous avons: $U_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.

2. Déterminons la limite de la suite (U_n):

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 40 - 40 \times 0,5^n$$

$= 40$ car: $0,5 \in]0;1[$.

Ainsi, la suite (U_n) est convergente et converge vers " 40 ".

3. Déterminons le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre $38\ \mu g \cdot L^{-1}$:

Le nombre minimal " x " d'injections nécessaires pour atteindre $38\ \mu g \cdot L^{-1}$ est tel que: $U_x \geq 38$.

$U_x \geqslant 38 \iff 40 - 40 \times 0,5^x \geqslant 38$

$\iff -40 \times 0,5^x \geqslant -2$

$\iff 40 \times 0,5^x \leqslant 2$

$\iff x \times \ln(0,5) \leqslant -\ln(20)$

$\iff x \geqslant \dfrac{-\ln(20)}{\ln(0,5)}$, car: $0,5 \in]0;1[$, et donc: $\ln(0,5) < 0$

$\Rightarrow x \geqslant 4,321.$

Nous prendrons $x = 5$ injections car n est un entier $\geqslant 1$.

En conclusion, le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre l'équilibre ($38\ \mu g \cdot L^{-1}$) est de 5.