Spé Maths
Terminale

Récurrence, Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

RÉCURRENCE, SYNTHÈSE 6

ÉNONCÉ

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est " de type S " ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes:

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85% restent de type S, 5% deviennent malades et 10% deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65% restent malades, et 35% sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants:

S_n: " l'individu est de type S en semaine n ";

M_n: " l'individu est malade en semaine n ";

I_n: " l'individu est immunisé en semaine n ".

En semaine 0, tous les individus sont considérés " de type S ", on a donc les probabilités suivantes: $P(S_0) = 1$, $P(M_0) = 0$ et $P(I_0) = 0$.

Pour tout entier naturel n , on note $U_n = P(S_n)$, $V_n = P(M_n)$ et $W_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des événements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a: $U_n + V_n + W_n = 1$.

On admet que la suite (V_n) est définie par $V_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n:

$$V_{n+1} = 0,65 \times V_n + 0,05 \times U_n.$$

2. A l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (U_n), (V_n) et (W_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,8500	0,0500	0,1000
4	2	0,7225	0,0750	0,2025
5	3	0,6141	0,0849	0,3010
6	4	0,5220	0,0859	0,3921
7	5	0,4437	0,0819	0,4744
8	6	0,3771	0,0754	0,5474
...	...	...	...	...
20	18	0,0536	0,0133	0,9330
21	19	0,0456	0,0113	0,9431
22	20	0,0388	0,0096	0,9516

a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet, par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (V_n) ?

b. On admet que les termes de (V_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N, appelé le " pic épidémique ": c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.

Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par le modèle.

3. **a**. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a: $U_{n+1} = 0,85\ U_n$.

En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a: $V_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$.

4. Calculer les limites de chacune des trois suites (U_n), (V_n) et (W_n).

Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?