Spé Maths
Terminale

Récurrence, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉCURRENCE, SYNTHÈSE 4

CORRECTION

1. a. Modélisation à l'aide d'un arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

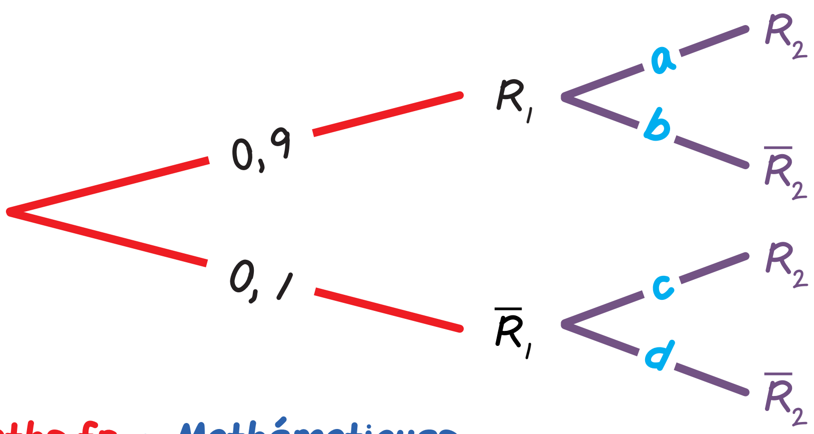
- R_1 = " le client rapporte la bouteille de son panier de la 1ère semaine ".
- R_2 = " le client rapporte la bouteille de son panier de la 2è semaine ".

- $P(R_1) = 0,9$
- $P(\overline{R_1}) = 0,1$.

- $P_{R_1}(R_2) = 0,95$
- $P_{R_1}(\overline{R_2}) = 1 - 0,95 = 0,05$.

- $P_{\overline{R_1}}(R_2) = 0,2$
- $P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) = 1 - 0,2 = 0,8$.

D'où l'arbre pondéré suivant:



, avec:

- $a = 0,95$
- $b = 0,05$
- $c = 0,2$
- $d = 0,8$

1. b. Déterminons la probabilité que le client rapporte ses bouteilles du panier de la 1ère semaine et de la 2è semaine:

Ici, il s'agit de calculer: $P(R_1 \cap R_2)$.

$P(R_1 \cap R_2) = P_{R_1}(R_2) \times P(R_1)$.

Ainsi: $P(R_1 \cap R_2) = 0,95 \times 0,9$ cad: $P(R_1 \cap R_2) = 85,5\%$.

Au total, la probabilité que le client rapporte ses bouteilles du panier de la 1ère semaine et de la 2è semaine est de: 85,5%.

1. c. Montrons que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la 2è semaine est égale à 0,875:

Il s'agit donc de calculer: $P(R_2)$.

L'événement $R_2 = (R_2 \cap R_1) \cup (R_2 \cap \overline{R_1})$.

D'où: $P(R_2) = P(R_2 \cap R_1) + P(R_2 \cap \overline{R_1})$

$$= P_{R_1}(R_2) \times P(R_1) + P_{\overline{R_1}}(R_2) \times P(\overline{R_1}).$$

Ainsi: $P(R_2) = 0,855 + 0,2 \times 0,1$ cad: $P(R_2) = 0,875$.

Au total, la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la 2è semaine est bien égale à: 0,875.

1. d. Calculons $P_{R_2}(\overline{R_1})$ en arrondissant à 10^{-3}:

$$P_{R_2}(\overline{R_1}) = \frac{P(R_2 \cap \overline{R_1})}{P(R_2)}$$

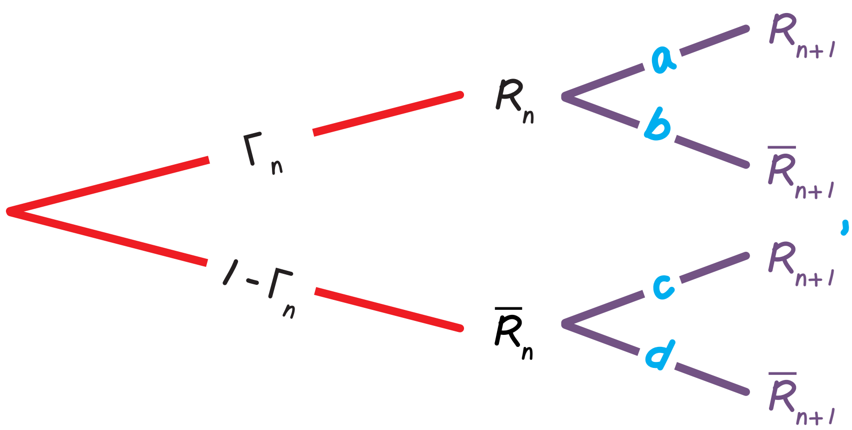
$$= \frac{P_{\overline{R_1}}(R_2) \times P(\overline{R_1})}{P(R_2)}$$

Ainsi: $P_{R_2}(\overline{R}_1) = \dfrac{0,2 \times 0,1}{0,875}$ cad: $P_{R_2}(\overline{R}_1) \approx 0,023$.

Ainsi, la probabilité demandée est environ égale à: 2,3%.

2. a. Recopions et complétons l'arbre pondéré:

L'arbre pondéré recopié et complété est le suivant:



, avec: $\cdot a = 0,95$; $\cdot b = 0,05$; $\cdot c = 0,2$; $\cdot d = 0,8$.

2. b. Justifions que pour tout entier naturel n, $r_{n+1} = 0,75 \cdot r_n + 0,2$:

Il s'agit donc de calculer: $P(R_{n+1})$.

L'événement $R_{n+1} = (R_{n+1} \cap R_n) \cup (R_{n+1} \cap \overline{R}_n)$.

D'où: $P(R_{n+1}) = P(R_{n+1} \cap R_n) + P(R_{n+1} \cap \overline{R}_n)$

$$= P_{R_n}(R_{n+1}) \times P(R_n) + P_{\overline{R}_n}(R_{n+1}) \times P(\overline{R}_n).$$

Ainsi: $P(R_{n+1}) = 0,95 \times r_n + 0,2 \times (1 - r_n)$ cad: $P(R_{n+1}) = 0,75 \cdot r_n + 0,2$.

Au total, pour tout entier naturel n, nous avons: $r_{n+1} = P(R_{n+1}) = 0,75 \cdot r_n + 0,2$.

2. c. Démontrons que pour tout entier naturel n non nul, $r_n = 0,1 \times (0,75)^{n-1} + 0,8$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel non nul n: $\Gamma_n = 0,1 \times (0,75)^{n-1} + 0,8$ ".

Initialisation: $\Gamma_1 = 0,1 \times (0,75)^{1-1} + 0,8$ **cad**: $\boldsymbol{\Gamma_1 = 0,9}$.

Or: $\boldsymbol{P(R_1) = 0,9}$.

Donc **vrai au rang " 1 "**.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\Gamma_n = 0,1 \times (0,75)^{n-1} + 0,8$

et montrons qu'alors: $\Gamma_{n+1} = 0,1 \times (0,75)^{n} + 0,8$.

Supposons: $\Gamma_n = 0,1 \times (0,75)^{n-1} + 0,8$, pour un entier naturel non nul fixé.

(1)

(1) => $0,75\,\Gamma_n = 0,75 \times [\,0,1 \times (0,75)^{n-1} + 0,8\,]$

=> $0,75\,\Gamma_n + 0,2 = 0,75 \times [\,0,1 \times (0,75)^{n-1} + 0,8\,] + 0,2$

(car: $\boldsymbol{\Gamma_{n+1} = 0,75 \cdot \Gamma_n + 0,2}$)

=> $0,75\,\Gamma_n + 0,2 = 0,1 \times (0,75)^{n} + 0,8$

=> $\Gamma_{n+1} = 0,1 \times (0,75)^{n} + 0,8$.

Conclusion: Pour tout entier naturel non nul, nous avons bien:

$$\Gamma_n = 0,1 \times (0,75)^{n-1} + 0,8.$$

2. d. d1. Calculons la limite de la suite (Γ_n):

$$\lim_{n \to +\infty} \Gamma_n = \lim_{n \to +\infty} 0,1 \times (0,75)^{n-1} + 0,8$$

$= \mathbf{0,8}$ car: $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,75)^{n-1} = 0$, car: $0,75 \in]0;1[$.

Au total: $\lim\limits_{n \to +\infty} \Gamma_n = 0,8$.

2. d. d2. Interprétons le résultat obtenu:

Cela signifie qu'au bout d'un très grand nombre de semaines, la probabilité pour un client de rapporter la bouteille se stabilise autour de 80%.