Spé Maths
Terminale

Récurrence, Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

RÉCURRENCE, SYNTHÈSE 3

ÉNONCÉ

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (U_n) définie par la donnée de son premier terme U_1 et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par la relation : $U_{n+1} = (n+1)\, U_n - 1$.

Partie A

1. Vérifier, en détaillant le calcul, que si $U_1 = 0$ alors $U_4 = -17$.

2. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'en saisissant préalablement dans U une valeur de U_1, il calcule les termes de la suite (U_n) de U_2 à U_{13}.

```
Pour N allant de 1 à 12
    U ←
Fin Pour
```

3. On a exécuté cet algorithme pour $U_1 = 0,7$ puis pour $U_1 = 0,8$.

Pour $u_1 = 0,7$	Pour $u_1 = 0,8$
0,4	0,6
0,2	0,8
-0,2	2,2
-2	10
-13	59
-92	412
-737	3295
-6634	29654
-66341	296539
-729752	3261928
-8757025	39143135
-113841326	508860754

Quelle semble être la limite de cette suite si $U_1 = 0,7$? Et si $U_1 = 0,8$?

Partie B

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, par: $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$.

1. Prouver que la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 1]$ est une primitive de f avec:

$$f(x) = x\,e^{1-x} \quad \text{et} \quad F(x) = (-1 - x)\,e^{1-x}.$$

2. En déduire que: $I_1 = e - 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+1} = (n+1)\,I_n - 1.$$

Utiliser cette formule pour calculer I_2.

4. a. Justifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a: $0 \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant x^n e$.

b. Justifier que: $\displaystyle\int_0^1 x^n \, e \, dx = \frac{e}{n+1}$.

c. En déduire que: $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.

d. Déterminer: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n$.

Partie C

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a: $U_n = n!\,(U_1 - e + 2) + I_n$.

2. On admet que: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n! = +\infty$.

a. Déterminer la limite de la suite (U_n) lorsque $U_1 = 0,7$.

b. Déterminer la limite de la suite (U_n) lorsque $U_1 = 0,8$.