

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Récurrance, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A:

1. Vérifions que si $U_1 = 0$, alors $U_4 = -17$:

Ici: • $U_{n+1} = (n+1)U_n - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ($n \geq 1$)

• $U_1 = 0$.

Dans ces conditions:

• $U_2 = (1+1)U_1 - 1 \Leftrightarrow U_2 = 2 \times 0 - 1$ **cad:** $U_2 = -1$,

• $U_3 = (2+1)U_2 - 1 \Leftrightarrow U_3 = 3 \times (-1) - 1$ **cad:** $U_3 = -4$,

• $U_4 = (3+1)U_3 - 1 \Leftrightarrow U_4 = 4 \times (-4) - 1$ **cad:** $U_4 = -17$.

Au total: si $U_1 = 0$, alors nous avons bien $U_4 = -17$.

2. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

Pour N allant de 1 à 12

$$U \leftarrow (N+1) \times U - 1$$

Fin Pour

3. Quelle semble être les limites de cette suite quand $U_1 = 0,7$ puis quand $U_1 = 0,8$?

Les conjectures que nous pouvons émettre sur les limites de la suite (U_n) sont:

- Si $U_1 = 0,7$: "on pourrait, a priori, penser que la limite de la suite (U_n) est $-\infty$ ".
- Si $U_1 = 0,8$: "on pourrait, a priori, penser que la limite de la suite (U_n) est $+\infty$ ".

Ainsi: • dans le cas où $U_1 = 0,7$, la limite semble être $-\infty$,
• dans le cas où $U_1 = 0,8$, la limite semble être $+\infty$.

Partie B:

1. Prouvons que la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle $[0; 1]$:

Ici: • $f(x) = x e^{1-x}$
• $Df = [0; 1]$.

Sur l'intervalle $[0; 1]$, la fonction F est une primitive de la fonction f ssi:

$$F'(x) = f(x).$$

Pour $x \in [0; 1]$, soit: $F(x) = (-1-x) e^{1-x}$ [$u \times e^v$].

F est bien une primitive de f sur $[0; 1]$ car:

$$F'(x) = [(-1) \times e^{1-x}] + [(-1-x) \times (-1) \times e^{1-x}]$$

$$[u' \times e^v] + [u \times v' \times e^v]$$

$$\Leftrightarrow F'(x) = x e^{1-x} \text{ cad: } F'(x) = f(x).$$

Au total: F est bien une primitive de f sur $[0; 1]$.

2. Déduisons-en que $I_1 = e - 2$:

$$\text{Ici: } I_1 = \int_0^1 x e^{1-x} dx, \text{ car: } I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

$$\text{D'où: } I_1 = \int_0^1 f(x) dx$$

$$= [(-1-x)e^{1-x}]_0^1, \text{ car: } F(x) = (-1-x)e^{1-x}$$

$$= -2 \times e^0 - (-1 \times e^1)$$

$$= e - 2.$$

Au total, nous avons bien: $I_1 = e - 2$.

3. Calculons I_2 :

$$\text{D'après l'énoncé: } I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

$$\text{Dans ces conditions: } I_2 = (1+1)I_1 - 1 \text{ cad: } I_2 = 2e - 5.$$

$$\text{Ainsi: } I_2 = 2e - 5.$$

4. a. Justifions que $\forall x \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$:

$$\text{Pour tout } x \in [0; 1] \text{ et } n \in \mathbb{N}^*: 0 \leq x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -x \leq -0$$

$$\Leftrightarrow 1-1 \leq 1-x \leq 1-0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1-x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow e^0 \leq e^{-x} \leq e^1$$

(car la fonction exponentielle est croissante)

$$\Leftrightarrow 1 \leq e^{-x} \leq e \quad (1).$$

En multipliant chaque membre de (1) par x^n qui est positif sur $[0; 1]$,

nous obtenons: (1) $\Leftrightarrow x^n \times 1 \leq x^n \times e^{-x} \leq x^n \times e$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^n \leq x^n e^{-x} \leq x^n e, \text{ car: } x^n \geq 0 \text{ sur } [0; 1]$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n e.$$

Au total, $\forall x \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n e$.

4. b. Justifions que $\int_0^1 x^n e \, dx = \frac{e}{n+1}$:

Soit h , la fonction définie sur $[0; 1]$ par: $h(x) = x^n e$.

La fonction h est continue sur $[0; 1]$, elle admet donc des primitives sur $[0; 1]$

et par conséquent: $\int_0^1 h(x) \, dx$ existe.

$$\begin{aligned} \text{Ici: } \int_0^1 h(x) \, dx &= \int_0^1 x^n e \, dx \\ &= e \times \int_0^1 x^n \, dx \\ &= e \times \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{e}{n+1}. \end{aligned}$$

Au total, nous avons bien: $\int_0^1 x^n e^{-x} dx = \frac{e^{-1}}{n+1}$.

4. c. Dédisons-en que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{e^{-1}}{n+1}$:

Pour tout $x \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons:

- $g(x) = 0$,
- $f(x) = x e^{-x}$,
- $h(x) = x^n e^{-x}$.

Notons que:

- les fonctions g, f et h sont continues sur $[0; 1]$;
- elles admettent donc des primitives sur $[0; 1]$, et par conséquent:

$$\int_0^1 g(x) dx, \int_0^1 f(x) dx \text{ et } \int_0^1 h(x) dx \text{ existent};$$

- de plus, les fonctions g, f et h sont positives sur $[0; 1]$;
- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire:

$$0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 g(x) dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 h(x) dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n e^{-1} dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{e^{-1}}{n+1}$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$. (a)

4. d. Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$:

Quand n tend vers $+\infty$: • $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$ (terme de gauche de (a))

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ (terme de droite de (a)).

D'où, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Au total: $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Partie C:

1. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = n!(U_1 - e + 2) + I_n$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = n!(U_1 - e + 2) + I_n$ ".

Initialisation: • $U_1 = 1!(U_1 - e + 2) + I_1$
 $= U_1 - e + 2 + e - 2$
 $= U_1$.

Donc vrai au rang " 1 ".

• $U_2 = 2!(U_1 - e + 2) + I_2$
 $= 2(U_1 - e + 2) + 2e - 5$

$$= 2 U_1 - 1.$$

Donc vrai au rang 2^1 . (car: $U_{n+1} = (n+1) U_1 - 1$)

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $U_n = n! (U_1 - e + 2) + I_n$
et montrons qu'alors $U_{n+1} = (n+1)! (U_1 - e + 2) + I_{n+1}$.

Supposons: $U_n = n! (U_1 - e + 2) + I_n$, pour un entier naturel n fixé supérieur

(1) ou égal à 1.

[Rappel: $U_{n+1} = (n+1) U_n - 1$ et $I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$]

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow (n+1) \times U_n = (n+1) \times n! (U_1 - e + 2) + (n+1) \times I_n \\ &\Rightarrow (n+1) \times U_n - 1 = (n+1)! (U_1 - e + 2) + (n+1) \times I_n - 1 \\ &\Rightarrow U_{n+1} = (n+1)! (U_1 - e + 2) + I_{n+1}. \end{aligned}$$

Conclusion: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = n! (U_1 - e + 2) + I_n$.

2. a. Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ quand $U_1 = 0, 7$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n! (U_1 - e + 2) + I_n \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} n! (U_1 - e + 2) \right) + \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \right) \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} n! (2, 7 - e) \right) + \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \right) \\ &= -\infty + 0, \text{ car: } 2, 7 - e < 0 \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

Ainsi: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$, lorsque $U_1 = 0, 7$.

2. b. Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ quand $U_1 = 0, 8$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n!(U_1 - e + 2) + I_n$$

$$= \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} n!(U_1 - e + 2) \right) + \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \right)$$

$$= \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} n!(2, 8 - e) \right) + \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \right)$$

$$= +\infty + 0, \text{ car: } 2, 8 - e > 0$$

$$= +\infty.$$

Ainsi: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$, lorsque $U_1 = 0, 8$.