www.freemaths.fr

Spé Maths
Terminale

Récurrence, Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

RÉCURRENCE, SYNTHÈSE 19

ÉNONCÉ

Partie A

On se propose d'étudier la fonction C définie et dérivable sur $[\ 1 ; +\infty\ [$ par:

$$C(x) = e^{x-1} - \frac{1}{2}.$$

On pose: $\varphi(x) = C(x) - x$, pour $x \in [\ 1 ; +\infty\ [$.

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction φ.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction φ sur $[\ 1 ; +\infty\ [$.

3. En déduire que l'équation $C(x) = x$ admet une unique solution α.

4. Établir que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

Partie B

On se propose d'étudier une méthode d'approximation du nombre α.

Soit g la fonction définie sur $I = \left[\frac{3}{2} ; 2\right]$ par: $g(x) = \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) + 1$.

1. Démontrer que l'équation $C(x) = x$ équivaut à l'équation $g(x) = x$ pour $x \in I$.

2. a. Justifier que la fonction g est croissante sur I et en déduire que, pour tout réel x appartenant à I, $g(x)$ appartient à I.

b. Montrer que, pour tout réel x de I : $0 \leqslant g'(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

3. On admet alors que, pour tout couple de réels (x, y) de I, on a :

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

a. Montrer que, pour tout réel x de I, on a :

$$|g(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|.$$

Soit la suite (ω_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\omega_{n+1} = g(\omega_n) \text{ avec } \omega_0 = \frac{3}{2}.$$

b. Donner une valeur arrondie à 10^{-3} près de ω_2 et ω_3.

c. Établir que pour tout entier naturel n : $|\omega_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

d. En déduire que la suite (ω_n) est convergente. Quelle est sa limite ?