

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Récurrance, Synthèse



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ

Partie A

Soit f la fonction définie pour $x \geq 1$ par: $f(x) = \frac{30x - 16}{15x - 2}$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Calculer $f(1)$. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire quant à la courbe représentative de f ?

2. Montrer que pour tout $x \geq 1$: $f'(x) = \frac{180}{(15x - 2)^2}$.

3. Dresser le tableau de variation de f pour $x \geq 1$.

4. Représenter la courbe \mathcal{C} dans un repère orthonormal.

Partie B

Un cadre d'une banque envisage la commercialisation d'un produit financier dont la valeur, en centaine d'euros à la fin de l'année $(2016 + n)$, serait modélisée par la suite (U_n) définie par:

$$U_0 = 1 \text{ et pour tout entier } n, U_{n+1} = f(U_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier n : $1 \leq U_n \leq 2$.

2. On introduit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par:

$$V_{n+1} = \frac{15U_n - 20}{15U_n - 12}.$$

a. Expliquer pourquoi la suite (V_n) est bien définie.

b. Calculer V_0 , V_1 et V_2 .

Démontrer que la suite (V_n) est géométrique de premier terme $\frac{-5}{3}$ et de raison $\frac{5}{9}$.

c. Exprimer V_n en fonction de n .

d. Après avoir donné l'expression de U_n en fonction de V_n , démontrer que:

$$U_n = \frac{4 \times 5^n + 4 \times 9^n}{5 \times 5^n + 3 \times 9^n}.$$