Spé Maths
Terminale

Récurrence, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉCURRENCE, SYNTHÈSE 18

CORRECTION

Partie A:

1. a. Calculons $f(1)$:

$$f(1) = \frac{30 \times 1 - 16}{15 \times 1 - 2} \Rightarrow f(1) = \frac{14}{13}.$$

Ainsi: $f(1) = \frac{14}{13}.$

1. b. Déterminons la limite de f en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{30x - 16}{15x - 2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{30x}{15x} \quad \text{(= lim en } +\infty \text{ des termes de plus haut degré)}$$

$$= 2.$$

Au total: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2.$

1. c. Que peut-on déduire quant à la courbe représentative de f ?

Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$, nous pouvons affirmer que: la courbe $\mathcal{C}$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

2. Calculons f', pour tout $x \geqslant 1$:

Ici: • $f(x) = \dfrac{30x - 16}{15x - 2}$

• $Df = [\ 1 ; +\infty\ [$.

Posons: $f = \dfrac{f_1}{f_2}$, avec: $f_1(x) = 30x - 16$ et $f_2(x) = 15x - 2$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme fonctions polynômes, donc dérivables sur $[\ 1 ; +\infty\ [$.

Dans ces conditions, $\dfrac{f_1}{f_2}$ est dérivable sur $[\ 1 ; +\infty\ [$ comme quotient $\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)$ de deux fonctions dérivables sur $[\ 1 ; +\infty\ [$, avec: pour tout $x \in [\ 1 ; +\infty\ [$, $f_2(x) \neq 0$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[\ 1 ; +\infty\ [$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\ 1 ; +\infty\ [$.

Pour tout $x \in [\ 1 ; +\infty\ [$: $f'(x) = \dfrac{30 \times (15x - 2) - 15\,(30x - 16)}{(15x - 2)^2}$

$$\Longleftrightarrow\ f'(x) = \frac{450x - 60 - (450x - 240)}{(15x - 2)^2}$$

$$\Longrightarrow\ f'(x) = \frac{180}{(15x - 2)^2}.$$

Au total: pour tout $x \in [\ 1 ; +\infty\ [$, $f'(x) = \dfrac{180}{(15x - 2)^2}$.

3. Dressons le tableau de variation de f pour $x \geqslant 1$:

Pour tout $x \in [\ 1 ; +\infty\ [$: $f'(x) = \dfrac{180}{(15x - 2)^2} > 0$.

Ainsi: f est strictement croissante sur $[\ 1 ; +\infty\ [$.

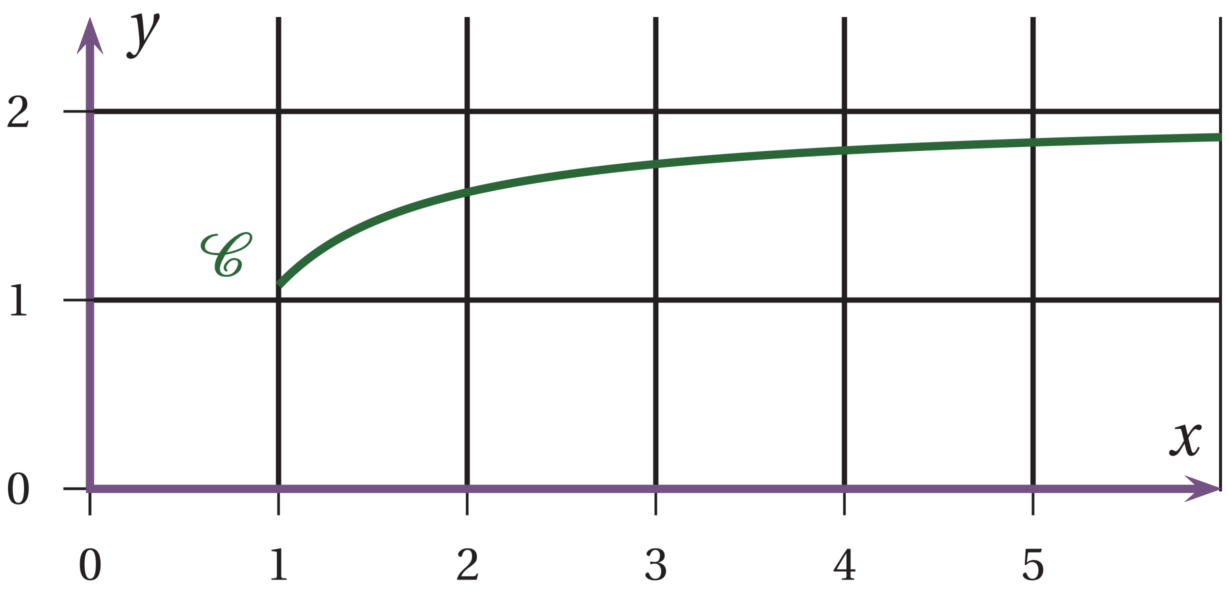
Nous pouvons dresser alors le tableau de variation suivant:

x	1		$+\infty$
f'		$+$	
f	a	$\nearrow$	b

Avec: • $a = f(1) \Rightarrow a = \dfrac{14}{13}$,

• $b = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \Rightarrow b = 2$.

4. Représentons la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal:



Partie B:

1. Montrons par récurrence que $\forall$ n $\in$ IN, $1 \leqslant U_n \leqslant 2$:

Nous allons montrer par récurrence que: " $\forall$ n $\in$ IN: $1 \leqslant U_n \leqslant 2$ ".

Initialisation: • $U_0 = 1$ et $1 \leqslant 1 \leqslant 2$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $U_1 = \dfrac{30 \times 1 - 16}{15 \times 1 - 2}$ cad: $U_1 = \dfrac{14}{13}$ et $1 \leqslant \dfrac{14}{13} \leqslant 2$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Supposons que $\forall$ n $\in$ IN, $1 \leqslant U_n \leqslant 2$ et montrons qu'alors:

$1 \leqslant U_{n+1} \leqslant 2$, avec: $U_{n+1} = \dfrac{30\,U_n - 16}{15\,U_n - 2}$.

Supposons: $1 \leqslant U_n \leqslant 2$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

(1) <=> $1 \leqslant U_n \leqslant 2$

=> $f(1) \leqslant f(U_n) \leqslant f(2)$,

car: la fonction f est strictement croissante sur [1; +∞ [et $U_n \geqslant 1$,

=> $\dfrac{14}{13} \leqslant U_{n+1} \leqslant \dfrac{30 \times 2 - 16}{15 \times 2 - 2}$

=> $\dfrac{14}{13} \leqslant U_{n+1} \leqslant \dfrac{44}{28}$

$$\Rightarrow \quad 1 \leqslant \frac{14}{13} \leqslant U_{n+1} \leqslant \frac{44}{28} \leqslant 2$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leqslant U_{n+1} \leqslant 2, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Conclusion: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, nous avons: $1 \leqslant U_n \leqslant 2$.

2. a. Expliquons pourquoi la suite (V_n) est bien définie:

La suite (V_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ ssi: $15\,U_n - 12 \neq 0$.

$15\,U_n - 12 \neq 0$ ssi: $U_n \neq \frac{4}{5} < 1$.

Or, c'est toujours vérifié car: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $U_n \geqslant 1$.

Au total: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, la suite (V_n) est bien définie.

2. b. b1. Calculons V_0, V_1 et V_2:

Après calculs, nous obtenons: $V_0 = \frac{-5}{3}$, $V_1 = \frac{-25}{27}$ et $V_2 = \frac{-125}{243}$.

2. b. b2. Montrons que la suite (V_n) est géométrique de premier terme $\frac{-5}{3}$ et de raison $\frac{5}{9}$:

- (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{9}$ ssi: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = \frac{5}{9} \times V_n$.

Or: $V_{n+1} = \dfrac{15\,U_{n+1} - 20}{15\,U_{n+1} - 12}$, avec: $U_{n+1} = \dfrac{30\,U_n - 16}{15\,U_n - 2}$.

Dans ces conditions: $V_{n+1} = \cdots \Rightarrow V_{n+1} = \dfrac{5}{9}\left[\dfrac{15\,U_n - 20}{15\,U_n - 12}\right]$

$$\Rightarrow \quad V_{n+1} = \frac{5}{9} \times V_n \ , \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

• De plus: $V_0 = \dfrac{15\,U_0 - 20}{15\,U_0 - 12} \iff V_0 = \dfrac{15 \times 1 - 20}{15 \times 1 - 12} \Rightarrow V_0 = \dfrac{-5}{3}.$

Au total: (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = \dfrac{5}{9}$ et de premier terme $V_0 = \dfrac{-5}{3}$.

2. c. Exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = \dfrac{5}{9}\,V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$V_n = V_0 \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n$, avec: $V_0 = \dfrac{-5}{3}$, cad: $V_n = \dfrac{-5}{3} \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n, \forall\ n \in \mathbb{N}.$

2. d. d1. Donnons l'expression de U_n en fonction de V_n:

Nous savons que: $V_n = \dfrac{15\,U_n - 20}{15\,U_n - 12} \iff V_n \times (15\,U_n - 12) = 15\,U_n - 20$

$$\iff 15\,U_n\,V_n - 12\,V_n = 15\,U_n - 20$$

$$\iff U_n \times (15\,V_n - 15) = 12\,V_n - 20$$

$$\Rightarrow \quad U_n = \frac{12\,V_n - 20}{15\,V_n - 15}.$$

Dans ces conditions: $U_n = \dfrac{12\left(\dfrac{-5}{3} \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n\right) - 20}{15\left(\dfrac{-5}{3} \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n\right) - 15}, \forall\ n \in \mathbb{N}.$

2. d. d2. Démontrons que $U_n = \dfrac{4 \times 5^n + 4 \times 9^n}{5 \times 5^n + 3 \times 9^n}$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad U_n = \frac{12\left(\frac{-5}{3} \times \left(\frac{5}{9}\right)^n\right) - 20}{15\left(\frac{-5}{3} \times \left(\frac{5}{9}\right)^n\right) - 15}$$

$$= \frac{-20 \times \left(\frac{5}{9}\right)^n - 20}{-25 \times \left(\frac{5}{9}\right)^n - 15}$$

$$= \frac{4 \times \left(\frac{5}{9}\right)^n + 4}{5 \times \left(\frac{5}{9}\right)^n + 3}$$

$$\Rightarrow \quad U_n = \frac{4 \times 5^n + 4 \times 9^n}{5 \times 5^n + 3 \times 9^n}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Au total: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n = \dfrac{4 \times 5^n + 4 \times 9^n}{5 \times 5^n + 3 \times 9^n}$.