Spé Maths
Terminale

Récurrence, Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

RÉCURRENCE, SYNTHÈSE

17

ÉNONCÉ

Soit f la fonction définie sur $I =]\,0\,;+\infty\,[$ par : $\quad f\,(x) = x\,\ln\,(x) + 1$.

On note C_f sa courbe dans un repère du plan.

Partie A

1. Déterminer les limites de $f\,(x)$ en 0 et $+\infty$.

2. On admet que f est dérivable sur I. Montrer que, pour tout $x \in I$:

$$f\,'(x) = 1 + \ln\,(x).$$

3. Étudier les variations de f sur I. Montrer que f admet un minimum dont on donnera la valeur exacte.

4. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe C_f au point d'abscisse $x = 1$.

5. On pose, pour tout $x \in I$, $g\,(x) = f\,(x) - x$.

   a. Étudier les variations de g sur I. On ne demande pas de calculer les limites.

   b. En déduire le signe de g sur I.

c. En déduire les positions relatives de C_f et Δ sur I.

Partie B

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution notée α_n dans I.

2. Préciser la valeur de α_1.

3. Démontrer que la suite (α_n) est croissante.

4. Démontrer que la suite (α_n) n'est pas majorée.

5. Conclure quant à la convergence de la suite (α_n).

Partie C

Soit la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par:

$$U_{n+1} = f(U_n) \text{ avec } U_0 \in I.$$

1. Montrer que si $U_0 = 1$ alors la suite (U_n) est constante.

2. Montrer que la suite (U_n) est croissante.

3. On suppose que $U_0 \in]0\,;1[$.

   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < U_n < 1$.

   b. En déduire que la suite (U_n) converge vers un réel ℓ.

   c. On admet que la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer ℓ.