Spé Maths
Terminale

Récurrence, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉCURRENCE, SYNTHÈSE 17

CORRECTION

Partie A:

1. Déterminons les limites de f en 0 et $+\infty$:

Ici: • $f(x) = x \ln(x) + 1$

• $Df =]0; +\infty[$.

• limite de f en " 0 ":

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln(x) + 1$$

$= 1$, car d'après le cours: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

• limite de f en " $+\infty$ ":

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \ln(x) + 1$$

$= +\infty$, car d'après le cours: $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(x) = +\infty$.

Au total: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Montrons que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = 1 + \ln(x)$:

D'après l'énoncé, f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' sur $]0;+\infty[$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = [\,1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\,]$

$(u' \times v + u \times v')$

$= 1 + \ln(x)$.

Au total, nous avons bien: $f'(x) = 1 + \ln(x)$, $\forall\, x \in]0;+\infty[$.

3. a. Étudions les variations de f sur $]0;+\infty[$:

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout $x \in]0;+\infty[$.

- 1^{er} cas: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0 \iff 1 + \ln(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$.

- $2^{ème}$ cas: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0 \iff 1 + \ln(x) < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{e}$ ou $x \in]0;\frac{1}{e}[$.

- $3^{ème}$ cas: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0 \iff 1 + \ln(x) > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{e}$ ou $x \in]\frac{1}{e};+\infty[$.

Ainsi: • f est décroissante sur $]0;\frac{1}{e}]$. (strictement décroissante sur $]0;\frac{1}{e}[$)

• f est croissante sur $[\frac{1}{e};+\infty[$. (strictement croissante sur $]\frac{1}{e};+\infty[$)

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'	||	$-$	0	$+$	
f	|| 1	$\searrow$	$1 - \frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. b. Montrons que f admet un minimum dont on donnera la valeur exacte:

La fonction f admet un minimum quand $f'(x) = 0$, sachant que pour tout x appartenant à $]\,0\,; +\infty\,[$, $f(x) \geqslant f(x_{Min})$.

Or $f'(x) = 0$ quand: $x_{Min} = \frac{1}{e}$.

Dans ces conditions: $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1$

cad: $f\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{1}{e}$.

Au total, la fonction f admet comme minimum global: le point $A\left(\frac{1}{e}\,; 1 - \frac{1}{e}\right)$.

4. Déterminons une équation de la tangente Δ à la courbe Cf au point d'abscisse $x = 1$:

D'après le cours, l'équation réduite de la tangente Δ à la courbe Cf au point

$x = 1$ s'écrit: $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$. (1)

Or: $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$. $(B(1\,; 1))$

D'où: (1) <=> $y - 1 = 1 \times (x - 1)$ => $y = x$.

Au total, l'équation de la tangente Δ est: $y = x$.

5. a. Etudions les variations de g sur] 0 ; +∞ [:

Ici: • $g(x) = f(x) - x = x \ln(x) + 1 - x$

• $Dg =]\,0\,; +\infty\,[$.

Posons: $g = f + h$, avec: $h(x) = -x$.

f est dérivable sur] 0 ; +∞ [, d'après l'énoncé.

h est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc h est dérivable sur] 0 ; +∞ [.

Donc, g est dérivable sur] 0 ; +∞ [comme somme **(f + h)** de 2 fonctions dérivables sur] 0 ; +∞ [.

Ainsi, nous pouvons calculer g ' pour tout $x \in]\,0\,; +\infty\,[$.

Pour tout $x \in]\,0\,; +\infty\,[$: $g'(x) = f'(x) + h'(x)$

$= 1 + \ln(x) - 1$

$= \ln(x)$.

Au total, pour tout $x \in]\,0\,; +\infty\,[$: $g'(x) = \ln(x)$.

Afin d'établir les variations de g sur] 0 ; +∞ [, nous allons distinguer 3 cas:

• **1er cas**: $g'(x) = 0$.

$g'(x) = 0$ <=> $\ln(x) = 0$ <=> $x = 1$.

• **$2^{ème}$ cas**: $g'(x) < 0$.

$g'(x) < 0 \iff \ln(x) < 0 \iff x < 1$ ou $x \in]0; 1[$.

• **$3^{ème}$ cas**: $g'(x) > 0$.

$g'(x) > 0 \iff \ln(x) > 0 \iff x > 1$ ou $x \in]1; +\infty[$.

Ainsi: • g est décroissante sur $]0; 1]$. **(strictement décroissante sur $]0; 1[$)**

• g est croissante sur $[1; +\infty[$. **(strictement croissante sur $]1; +\infty[$)**

Nous pouvons alors dresser le tableau de variation suivant:

x	0		1		$+\infty$
g'	||	-	0	+	
g	|| 1	↘	0	↗	$+\infty$

5. b. Déduisons-en le signe de g sur I:

Grâce au tableau de variation précédent, nous constatons que: **$g(1) = 0$**.

Nous allons distinguer 2 cas:

• **si $x \in]0; 1[$, alors $g(x) > g(1) = 0$,**

• **si $x \in]1; +\infty[$, alors $g(x) > g(1) = 0$.**

Ainsi: • **la fonction g est strictement positive sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$,**

• **la fonction g est positive sur $]0; +\infty[$.**

5. c. **Déduisons-en les positions relatives de Cf et Δ sur $]\,0\,;+\infty\,[$:**

Rappelons que: • l'équation de Δ est $y = x$.

• le point de contact entre Cf et Δ est le point $B\,(1\,;1)$.

De plus, pour tout $x \in\,]\,0\,;+\infty\,[$: $g(x) \geqslant 0$

$$\Longleftrightarrow \quad f(x) - x \geqslant 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad f(x) \geqslant x.$$

Ainsi: Cf **est située au dessus de la droite Δ avec un seul point de contact, le point B.**

Partie B:

1. **Démontrons que l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$:**

Ici: $n \in \mathbb{N}^*$ ce qui revient à dire que $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Or nous savons que: • $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$,

• $f\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{1}{e} < 1$,

• f est strictement décroissante sur $]\,0\,;\frac{1}{e}\,[$.

Nous pouvons donc affirmer que pour tout x appartenant à $]\,0\,;\frac{1}{e}\,]$, $f(x) < 1$.

Donc nous pouvons rejeter le cas où $x \in\,]\,0\,;\frac{1}{e}\,]$.

Concentrons-nous à présent sur le cas où $x \in\,]\,\frac{1}{e}\,;+\infty\,[$.

Nous allons montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution α_n dans $\left]\frac{1}{e} ; +\infty\right[$.

Pour cela nous allons appliquer **le COROLLAIRE DU TVI**.

Ici:
- f est continue sur $\left]\frac{1}{e} ; +\infty\right[$.
- " $k = n$ " est compris entre: $f\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{1}{e} < 1$

  et: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

(donc la fonction f prend la valeur n au moins une fois sur $\left]\frac{1}{e} ; +\infty\right[$)

- f est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{e} ; +\infty\right[$ car pour tout $x \in \left]\frac{1}{e} ; +\infty\right[$, $f'(x) > 0$.

Ainsi, d'après le **COROLLAIRE DU TVI**, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = n$ ($k = n$) admet une unique solution α_n appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{e} ; +\infty\right[$, donc sur I: $]0 ; +\infty[$.

2. Précisons la valeur de α_1:

Nous savons que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$: $f(x) = x \ln(x) + 1$.

Dans ces conditions: $f(\alpha_n) = n$, avec $n = 1$

$\iff f(\alpha_1) = 1$

$\iff \alpha_1 \ln(\alpha_1) + 1 = 1$

$\iff \ln(\alpha_1) = 0$, car $\alpha_1 > \frac{1}{e}$ et donc $\alpha_1 \neq 0$

$\iff \alpha_1 = 1$.

Ainsi: la valeur de α_1 est " $\alpha_1 = 1$ ".

3. **Montrons que la suite (α_n) est croissante:**

D'après le cours, la suite (α_n) est strictement **croissante** si pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$: $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.

Ici, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons:
- $f(\alpha_n) = n$,
- $f(\alpha_{n+1}) = n + 1$.

Comme $n + 1 > n$, nous avons donc: $f(\alpha_{n+1}) > f(\alpha_n)$.

De plus:
- $\alpha_n \in \left]\frac{1}{e}\,; +\infty\right[$,
- $\alpha_{n+1} \in \left]\frac{1}{e}\,; +\infty\right[$,
- f est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{e}\,; +\infty\right[$.

Donc: $\alpha_{n+1} > \alpha_n$, **pour tout $n \in \mathbb{N}^*$**.

Ainsi: la suite (α_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

4. **Montrons que la suite (α_n) n'est pas majorée:**

D'après le cours, la suite (α_n) est majorée ssi il existe un réel M tel que pour tout entier naturel non nul n: $\alpha_n \leq M$. (M s'appelle " le majorant ")

Nous savons que la suite (α_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

De plus: $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n \to +\infty} n + 1$

$= +\infty$. (" $+\infty$ " n'est pas un réel fini)

Ainsi: **la suite (α_n) n'est pas majorée**.

5. Concluons quant à la convergence de la suite (α_n):

D'après le cours, nous savons que **toute suite croissante et majorée est convergente**.

Ici: la suite (α_n) est croissante sur $\mathbb{N}^*$ mais n'est pas majorée.

Donc, elle n'est **pas convergente**.

Ainsi: **la suite (α_n) n'est pas convergente**. **(On dit qu'elle est divergente)**

Partie C:

1. Montrons que si $U_0 = 1$, alors la suite (U_n) est constante:

D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$: • $U_{n+1} = f(U_n)$,

• $U_0 \in]\,0\,;+\infty\,[$.

D'après le cours, une suite (U_n) est constante sur $\mathbb{N}$ ssi: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n$.

Nous allons avoir recours à une démonstration par récurrence.

Montrons par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_{n+1} = U_n$, sachant que $U_{n+1} = f(U_n)$ ".

Initialisation: $U_0 = 1$, par hypothèse d'après l'énoncé.

Et: $U_1 = f(U_0) \iff U_1 = 1 \times \ln(1) + 1 \iff U_1 = 1$.

$(\,f(x) = x\ln(x) + 1\,)$

D'où: $U_1 = U_0 = 1$.

Donc **vrai au 1^er rang**.

Hérédité: Soit $n \in IN$, supposons $U_{n+1} = U_n$

et montrons qu'alors: $U_{n+2} = U_{n+1}$.

Supposons: $U_{n+1} = U_n$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

(1) => $f(U_{n+1}) = f(U_n)$

=> $U_{n+2} = U_{n+1}$, **car**: $U_{n+2} = f(U_{n+1})$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

Conclusion: **Pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n = 1$ et donc la suite (U_n) est constante.**

Et donc: **$\forall$ n $\in$ IN, $U_n = 1$.**

2. Montrons que la suite (U_n) est croissante:

D'après le cours, la suite (U_n) est **croissante** si pour tout entier $n \in IN$: $U_{n+1} \geq U_n$.

Ici, il s'agit donc de démontrer que: $\forall n \in IN$, $f(U_n) \geq U_n$.

Or nous savons, grâce à la question **Partie A 5. b.** que: **g est positive sur] 0; +∞ [.**

Cela signifie que: $\forall x \in]0; +\infty[$, $f(x) - x \geq 0 \iff f(x) \geq x$.

Donc ici, **en supposant que $U_n \in]0; +\infty[$**:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(U_n) \geqslant U_n \text{ cad } U_{n+1} \geqslant U_n.$$

Ainsi: la suite (U_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

3. a. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 1$:

D'après l'énoncé:
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = f(U_n)$,
- $U_0 \in \,]\,0\,;\,1\,[$.

Or nous savons, grâce à la **Partie A** que:
- $f(x) = x \ln(x) + 1$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- f est décroissante sur $]\,0\,;\,\frac{1}{e}\,]$
- f est croissante sur $[\,\frac{1}{e}\,;\,+\infty\,[$.

Ici, nous allons distinguer 2 cas:
- $U_n \in \,]\,0\,;\,\frac{1}{e}\,]$ et dans ce cas f est décroissante.
- $U_n \in [\,\frac{1}{e}\,;\,1\,[$ et dans ce cas f est croissante.

1er cas: $U_n \in \,]\,0\,;\,\frac{1}{e}\,]$ **et donc f est décroissante.**

Nous allons montrer par récurrence que: " $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 < U_n < 1$ ".

Initialisation: $0 < U_0 < 1$, par hypothèse.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $0 < U_n < 1$ (c'est le cas car $U_n \in]0 ; \frac{1}{e}]$)

et montrons qu'alors: $0 < U_{n+1} < 1$.

Supposons: $\underbrace{0 < U_n \leq \frac{1}{e}}_{(1)} < 1$, pour un entier naturel n fixé.

Comme f est décroissante sur $]0 ; \frac{1}{e}]$ et est continue sur $]0 ; \frac{1}{e}]$:

$(1) \Rightarrow 0 < U_n \leq \frac{1}{e}$

$\Rightarrow f(\frac{1}{e}) \leq f(U_n) < \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{e} \leq U_{n+1} < 1$

$\Rightarrow 0 < U_{n+1} < 1$, car: $1 - \frac{1}{e} > 0$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, avec $U_n \in]0 ; \frac{1}{e}]$, $0 < U_n < 1$.

2ème cas: $U_n \in [\frac{1}{e} ; 1[$ et donc f est croissante.

Initialisation: $0 < U_0 < 1$, par hypothèse.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $0 < U_n < 1$ (c'est le cas car $U_n \in [\frac{1}{e} ; 1[$)

et montrons qu'alors: $0 < U_{n+1} < 1$.

Supposons: $0 < \frac{1}{e} \leqslant U_n < 1$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

Comme f est croissante sur $[\frac{1}{e} ; 1[$ et est continue sur $[\frac{1}{e} ; 1[$:

$(1) \Rightarrow \frac{1}{e} \leqslant U_n < 1$

$\Rightarrow f(\frac{1}{e}) \leqslant f(U_n) < f(1)$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{e} \leqslant U_{n+1} < 1$

$\Rightarrow 0 < U_{n+1} < 1$, **car**: $1 - \frac{1}{e} > 0$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, avec $U_n \in [\frac{1}{e} ; 1[$, $0 < U_n < 1$.

Au total: **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 1$.**

3. b. Déduisons-en que la suite (U_n) converge vers un réel ℓ:

Quand n tend vers $+\infty$, la suite (U_n) est croissante et est majorée par $M = 1$. Elle est donc **convergente**.

Ainsi: la suite (U_n) est convergente et converge vers un réel ℓ.

3. c. Déterminons la limite ℓ:

Nous savons que la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

D'où: $f(x) = x \iff x \ln(x) + 1 = x \iff \ell = 1$ (car $x > 0$).

Ainsi: la suite (U_n) converge vers $\ell = 1$.