Spé Maths
Terminale

Récurrence, Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

RÉCURRENCE, SYNTHÈSE 16

CORRECTION

1. a. Recopions et complétons le tableau:

D'après l'énoncé, pour tout entier naturel n:

• $U_{n+1} = \frac{1}{5} U_n + 3 \times 0,5^n$,

• $U_0 = 2$.

Dans ces conditions, nous avons le tableau suivant:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
U_n	2	3, 4	2, 18	1, 19	0, 61	0, 31	0, 16	0, 08	0, 04

1. b. Énonçons une conjecture sur le sens de variation de (U_n):

La conjecture que nous pouvons émettre quant au sens de variation de la suite (U_n) est:

" on pourrait, a priori, penser que la suite (U_n) est strictement décroissante ".

En effet, plus " n " est grand, plus U_n est faible.

2. a. Montrons par récurrence, que pour tout entier n non nul, $U_n \geq \frac{15}{4} \times (0,5)^n$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel non nul n: $U_n \geq \frac{15}{4} \times (0,5)^n$ ".

Initialisation: • $U_1 = 3,4 \geq \frac{15}{4} \times (0,5)^1$?

oui car: $3,4 \geq \frac{15}{8}$.

Donc vrai au rang " 1 ".

• $U_2 = \frac{15}{8} \geq \frac{15}{4} \times (0,5)^2$?

oui car: $\frac{15}{8} \geq \frac{15}{16}$.

Donc vrai au rang " 2 ".

Hérédité: Supposons que pour tout entier naturel non nul n, $U_n \geq \frac{15}{4} \times (0,5)^n$ et montrons qu'alors: $U_{n+1} \geq \frac{15}{4} \times (0,5)^{n+1}$.

Supposons: $U_n \geq \frac{15}{4} \times (0,5)^n$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{5} U_n \geq \frac{1}{5} \times \frac{15}{4} \times (0,5)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} U_n + 3 \times (0,5)^n \geq \frac{3}{4} \times (0,5)^n + 3 \times (0,5)^n$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \geq \left(\frac{3}{4} + 3\right) \times (0,5)^n$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \geq \frac{15}{4} \times (0,5)^n$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{15}{4} \times (0,5)^n\right)$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \geq \frac{15}{4} \times (0,5)^{n+1}.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel non nul n, nous avons:

$$U_n \geq \frac{15}{4} \times (0,5)^n.$$

2. b. Déduisons-en que, pour tout entier naturel non nul n, $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$:

Pour tout entier naturel non nul n, nous avons:

$$U_{n+1} - U_n = \left(\frac{1}{5}U_n + 3 \times (0,5)^n\right) - U_n$$

$$<=> \quad U_{n+1} - U_n = -\frac{4}{5}U_n + 3 \times (0,5)^n$$

$$<=> \quad U_{n+1} - U_n = -\frac{4}{5}\left(U_n - \frac{15}{4} \times (0,5)^n\right).$$

Or: $U_n \geqslant \frac{15}{4} \times (0,5)^n \quad <=> \quad U_n - \left(\frac{15}{4} \times (0,5)^n\right) \geqslant 0.$

Dans ces conditions: $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$, pour tout entier naturel non nul n.

En conclusion, nous pouvons affirmer que: la suite (U_n) est décroissante.

2. c. Démontrons que la suite (U_n) est convergente:

- La suite (U_n) est minorée par " $15 \times (0,5)^n$ ".

En effet, pour tout entier naturel non nul n: $U_n \geqslant \frac{15}{4} \times (0,5)^n$.

- La suite (U_n) est décroissante.

Ainsi, comme la suite (U_n) est décroissante et est minorée, elle est donc convergente.

3. a. Montrons que (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q:

$V_n = U_n - 10 \times (0,5)^n \quad <=> \quad V_{n+1} = U_{n+1} - 10 \times (0,5)^{n+1}$

$$<=> \quad V_{n+1} = \left(\frac{1}{5}U_n + 3 \times (0,5)^n\right) - 10 \times (0,5)^{n+1} \quad (2).$$

Or: $V_0 = U_0 - 10 \times (0,5)^0 \quad => \quad V_0 = -8$ et $U_n = V_n + 10 \times (0,5)^n$.

Ainsi: $(2) \quad <=> \quad V_{n+1} = \left(\frac{1}{5}[\,V_n + 10 \times (0,5)^n\,] + 3 \times (0,5)^n\right) - 10 \times (0,5)^{n+1}$

$$\Rightarrow \quad V_{n+1} = \frac{1}{5} V_n .$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $V_0 = -8$.

3. b. Déduisons-en que, pour tout entier naturel n, $U_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times (0,5)^n$:

$V_{n+1} = \frac{1}{5} V_n$, nous pouvons donc écrire: $V_n = V_0 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$, avec: $V_0 = -8$.

Ainsi, nous savons que: * $V_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$

* $U_n = V_n + 10 \times (0,5)^n$.

D'où: $U_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times (0,5)^n$.

3. c. Déterminons la limite de la suite (U_n):

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times (0,5)^n$$

$$= 0, \quad \text{car: } \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} (0,5)^n = 0.$$

Ainsi, nous pouvons affirmer que: la suite (U_n) est convergente.